Plan 1. Repetisjon med oppgaver fra forrige uke.

- Oppg 1c : Tegn to grafer!
- oppg 2 b, d, h, i, k
  tolkninger av grafen til $f'(x)$
- Oppg 3c: Hvilken graf er $f(x)$ / $f'(x)$?
- oppg 4g: Voksende/avtagende fra $f'(x)$.

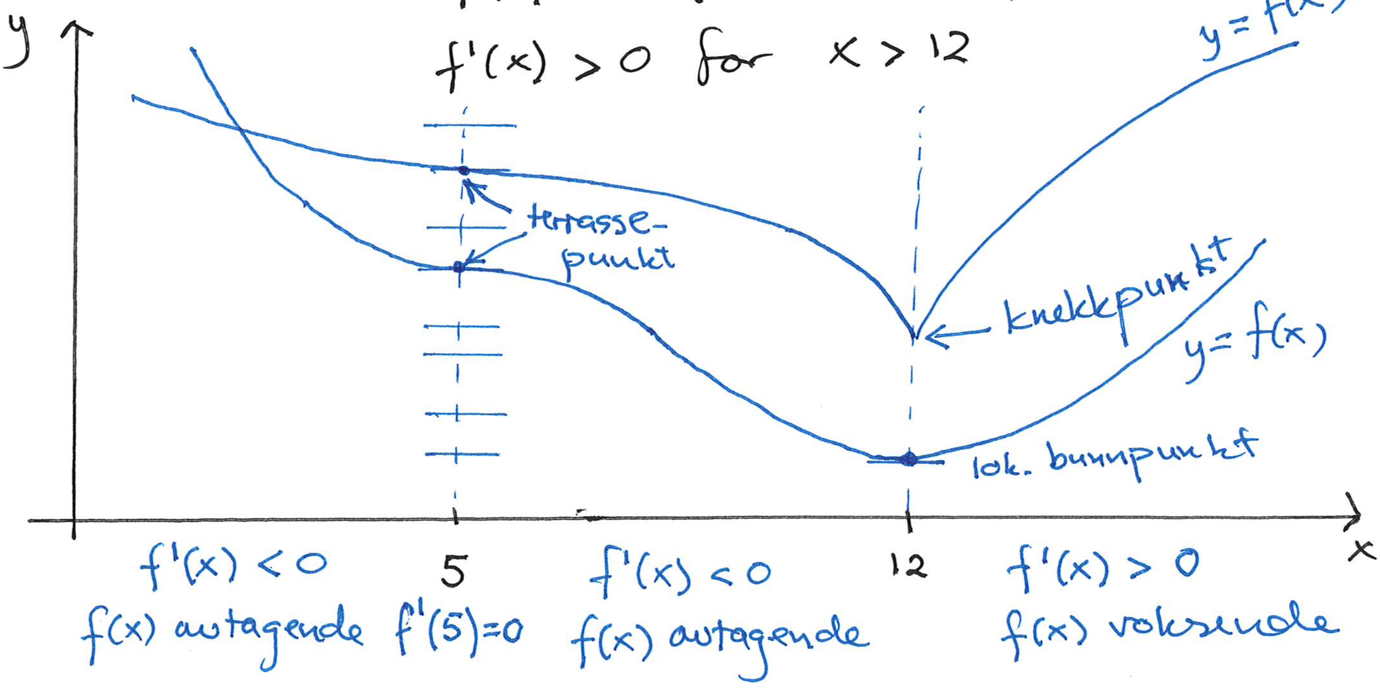
2. Implisitt derivasjon

---

1. Repetisjon **Oppg 1c** $f'(x) < 0$ for $x < 5$, $f'(5) = 0$

$f'(x) < 0$ for $5 < x < 12$,

$f'(x) > 0$ for $x > 12$

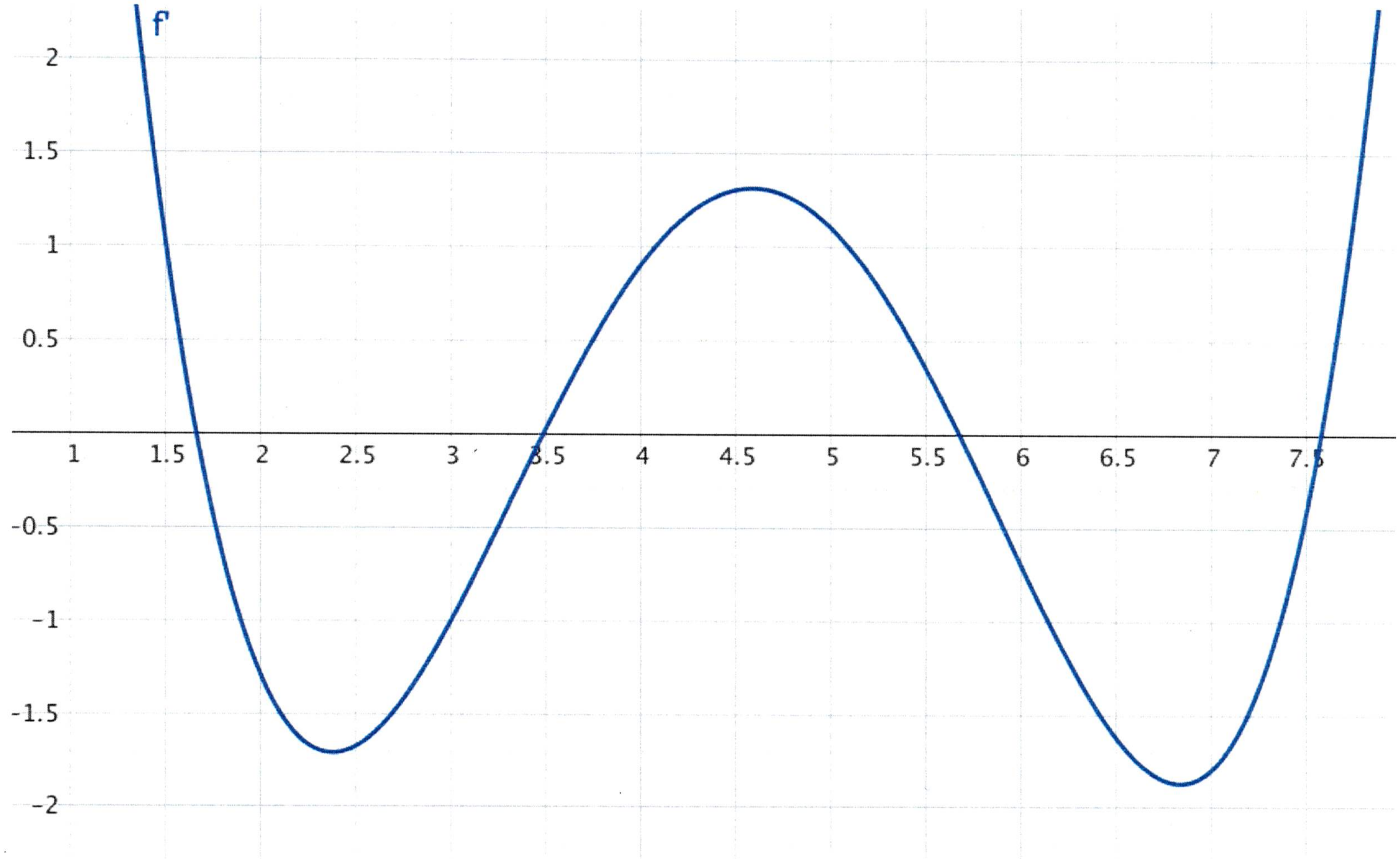


Oppg 2 b) $f(2) < f(3)$ GALT

Vi ser fra grafen til $f'(x)$ at $f'(x) < 0$ for $x \in [2, 3]$. Altså er $f(x)$ strengt avtagende for $x \in [2, 3]$, så

$f(2) > f(3)$.

Oppgave 2 I figur 1 ser du grafen til $f'(x)$.



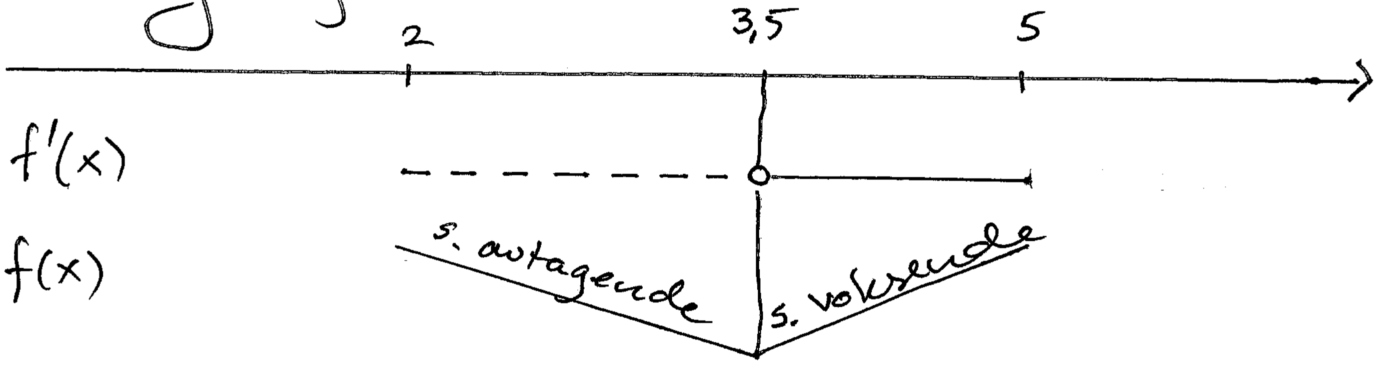
Figur 1: Grafen til $f'(x)$

2d) $f(x)$ har et lok. minimum (bunnpunkt) ved $x = 3{,}5$. SANT

Vi har at $f'(x) < 0$ for $x \in [2, 3{,}5\rangle$

og $f'(x) > 0$ for $x \in \langle 3{,}5, 5]$ og $f'(3{,}5) = 0$.

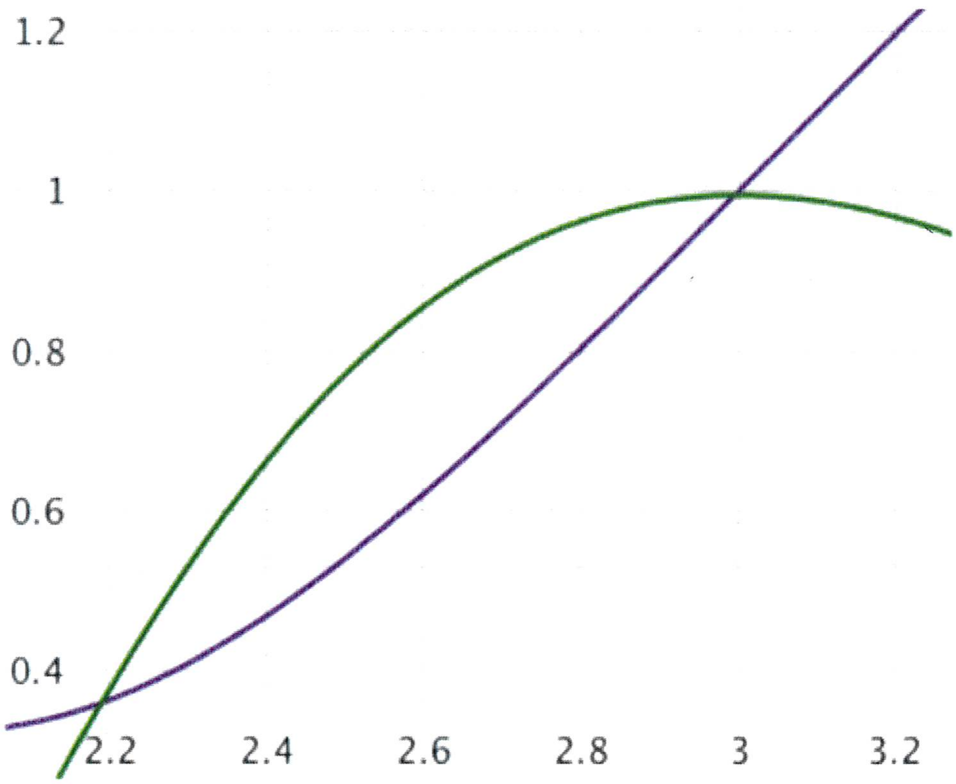
Fortegnsskjema:



Konkl. $x = 3{,}5$ er et lok. minimumspunkt for $f(x)$.

2h) $f(x)$ vokser raskere ved $x = 1{,}5$ enn ved $x = 5{,}5$.
SANT fordi stigningstallet til tangenten til $f(x)$ ved $x = 1{,}5$ er omtrent 1 ($f'(1{,}5) \approx 1$)
og stigningstallet til tangenten til $f(x)$ ved $x = 5{,}5$ er omtrent 0,35 ($f'(5{,}5) \approx 0{,}35$)
Grafen til $f(x)$ ligner på grafen til tangenten ved $x = 1{,}5$ når x er nær 1,5. Tilsv. for $x = 5{,}5$

2i) Den deriverte til $f'(x)$ er positiv for $x = 7{,}6$.
SANT. – fordi stigningstallet til tangenten til $f'(x)$ ved $x = 7{,}6$ er (veldig) positiv
($f''(7{,}6) \approx 6$)
telker ruter oppover



1.2
1
0.8
0.6
0.4
2.2
2.4
2.6
2.8
3
3.2

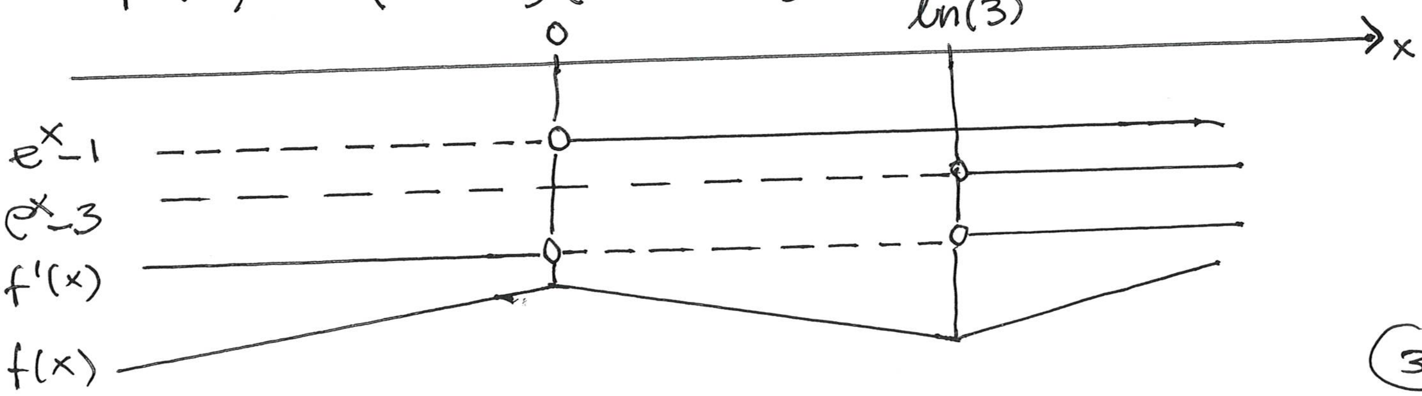
2k) Vi kan ikke bruke grafen til $f'(x)$ for å bestemme om $f(4,5)$ er positiv. SANT, fordi hvis vi legger til/trekker fra 1 mill. til $f(x)$ får vi samme $f'(x)$.

Oppg 3c Jeg „gjetter" at $f(x)$ er den fiolette. Men det er mye lettere å vise hva som er galt. Antar derfor at $f(x)$ er den grønne. Da er $f'(x)$ den fiolette. Men stigningstallene for tangentene til den grønne for $x>3$ er negative. Samtidig (for $x>3$) er funksjonsverdiene til den fiolette større enn 1. Dette er en motsigelse, så antagelsen er gal. Dermed må $f(x)$ være den fiolette og $f'(x)$ den grønne.

Oppg 4g $f'(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$. Finn de stasjonære punktene og avgjør hvor $f(x)$ er voksende/avtagende. Vil bruke fortegnsskjema for $f'(x)$. Setter $u = e^x$. Da er $u^2 = e^x \cdot e^x = e^{2x}$, så

$$f'(x) = u^2 - 4u + 3 = (u-1)(u-3)$$

$$f'(x) = (e^x - 1)(e^x - 3)$$



Så $f(x)$ er strengt voksende for x i $\langle \leftarrow, 0]$

—"— avtagende —"— $[0, \ln(3)]$

—"— voksende —"— $[\ln(3), \rightarrow\rangle$

Stasjonære punkter er løsningene på likningen $f'(x) = 0$, så $\underline{\underline{x = 0}}$, $\underline{\underline{x = \ln(3)}}$

Start: 15.10

---

2. Implisitt derivasjon

Eks $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ så $f'(x) = (-1)\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

– vanlig derivasjon.

I stedet setter vi $y = f(x)$, dvs $y = \frac{1}{x}$ $\quad | \cdot x$

$$\boxed{xy = 1}$$

Vi tenker på y som en (ukjent) funksjon av x.

så $y = y(x)$.

Deriverer begge sider av likningen m.h.p. x:

$$(x \cdot y)'_x = (1)'_x$$

produktregelen på VS gir:

$$(x)'_x \cdot y + x \cdot (y)'_x = 0$$

$$1 \cdot y + x \cdot y' = 0$$

Vi kan løse denne likningen for y':

$$x \cdot y' = -y \quad | : x$$

Dette kalles implisitt derivasjon

$$\boxed{y' = -\frac{y}{x}}$$

(Merk: $y = \frac{1}{x}$, så $y' = -\frac{(\frac{1}{x})}{x} = -\frac{1}{x^2}$)

En anvendelse Kan bruke implisitt derivasjon for å finne tangenter til kurven definert av likningen ($xy = 1$)

F. eks. hvis $x = 2$ så gir $xy = 1$ at $2y = 1$ $\mid :2$

dvs $y = \frac{1}{2}$

Da er $y'\Big|_{\substack{x=2 \\ y=\frac{1}{2}}} \overset{\text{rød boks}}{=} -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{4}$

Kan bruke dette i ettpunktsformelen for å finne uttrykket $h(x)$ til tangentlinjen til kurven $xy = 1$ gjennom punktet $(2, \frac{1}{2})$:

$$h(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

stigningstallet

$$h(x) = -\frac{1}{4}x + 1$$