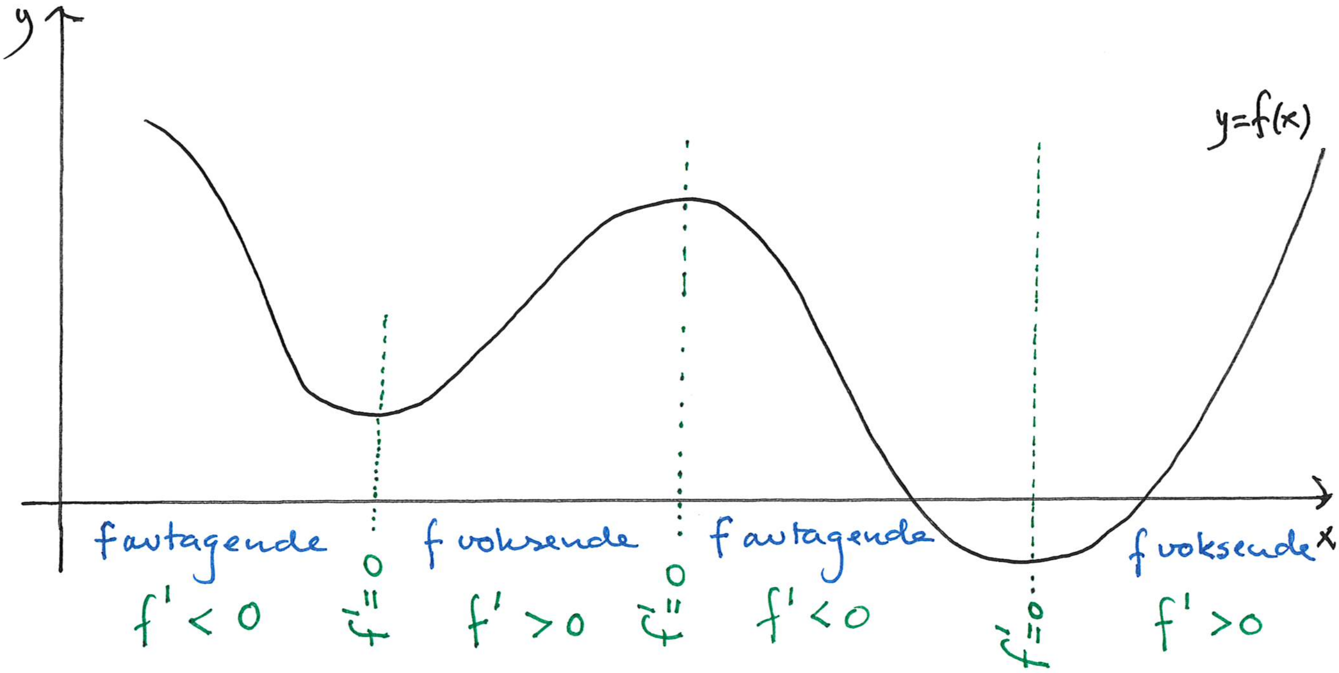
MET 1180, forelesning 18, 24. okt. 2024, Runar Ile

Plan
1. Lokale maks/min og stasjonære punkter
2. Globale maks/min
3. Middelverdisetningen

1. Lokale maks/min og stasjonære punkter



Hvis $f'(x)$ er pos., så er $f(x)$ voksende

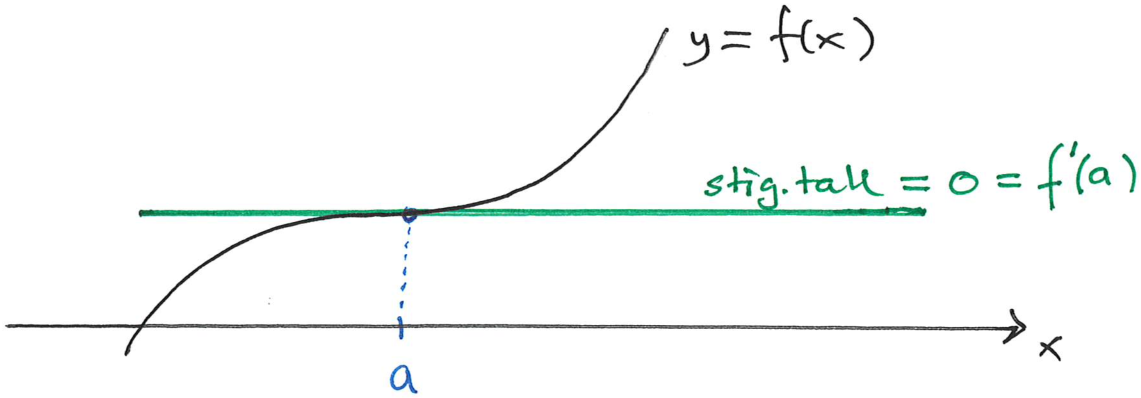
Hvis $f'(x)$ er neg., så er $f(x)$ avtagende

Hvis $x = a$ er et lokalt minimumspunkt, vil $f'(a) = 0$ og $f'(x)$ skifter fortegn fra $-$ til $+$

Hvis $x = a$ er et lokalt maksimumspunkt, vil $f'(a) = 0$ og $f'(x)$ skifter fortegn fra $+$ til $-$

Viktig konklusjon: Fortegnsskjemaet til $f'(x)$ bestemmer hvor $f(x)$ vokser og avtar og hvor de lok. maks. og minimums-punktene er.

Eks



Her er $x=a$ hverken et lok. maks. el. et. lok. minimumspunkt. Kaller $x=a$ et terrassepunkt. (den deriverte $=0$, men skifter ikke fortegn)

Definisjonen. Hvis $f'(a)=0$ er $x=a$ et stasjonært punkt.

Eks $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$. Stasjonære punkter?

– løser likningen $f'(x)=0$ for x.

Dvs $f'(x) \overset{\text{regner}}{=} 3x^2 - 12x \overset{\text{likn.}}{=} 0$

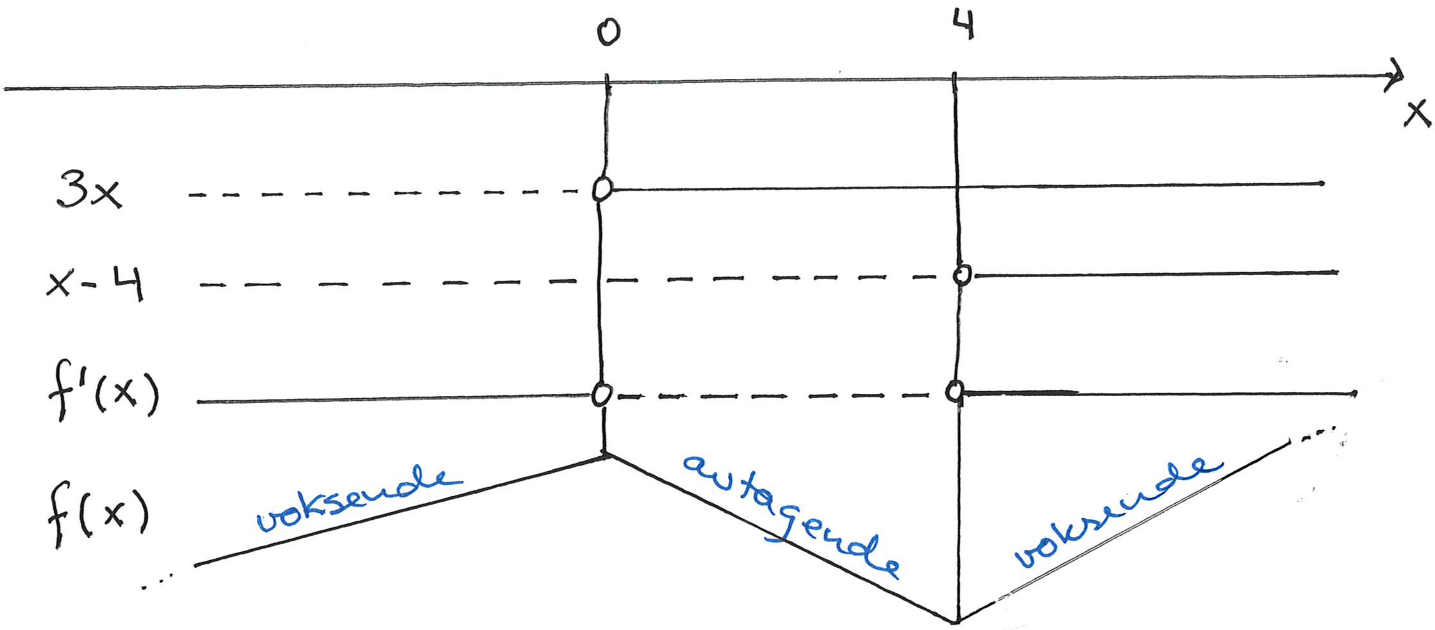
dvs $3x(x-4) = 0$

Så $f'(x)=0$ har løsninger $x=0$, $x=4$

Dette er de stasjonære punktene til $f(x)$.

Hvor er $f(x)$ voksende/avtagende?

Bruker fortegnsskjemaet for $f'(x)$.



$f(x)$ er strengt voksende for $x \leq 0$ (så $x \in \langle \leftarrow, 0]$)

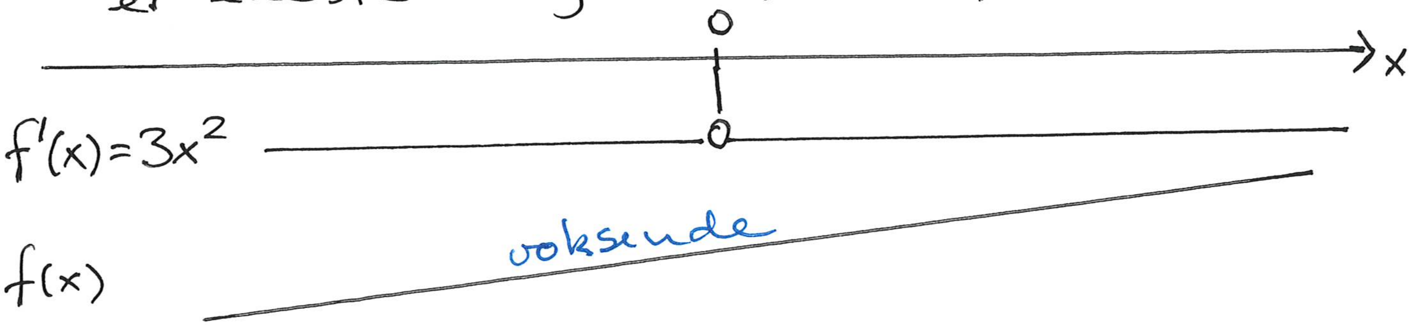
$f(x)$ er strengt avtagende for $0 \leq x \leq 4$ (så $x \in [0, 4]$)

$f(x)$ er strengt voksende for $x \geq 4$ (så $x \in [4, \rightarrow\rangle$)

Da er $x = 0$ et lokalt maksimumspunkt

og $x = 4$ —"— minimumspunkt.

<u>EKS</u> $f(x) = x^3 + 1$. Da er $f'(x) = 3x^2$, så <u>$x = 0$</u> er eneste stasjonære punkt for $f(x)$.



<u>Konkl.</u> $f(x)$ er strengt voksende (for alle tall på tallinjen, $x \in \mathbb{R}$)

Start: 9.02

Språkbruk: Maksimumspunkt = Toppunkt
Minimumspunkt = Bunnpunkt

---

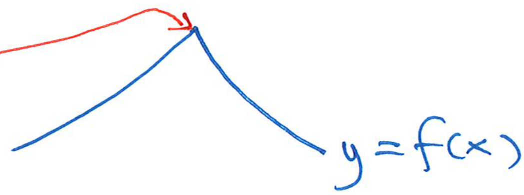
2. Globale maks/min

<u>Ekstremverdisetningen</u> Hvis $f(x)$ er kontinuerlig (sammenhengende graf) på intervallet $D_f = [a, b]$ så har $f(x)$ et maksimum (en største verdi) og et minimum (en minste verdi)

Tre mulige typer (globale) maks./min. punkter

(*) stasjonære punkter $(f'(x) = 0)$

(*) knekkpunkter (hvor $f'(x)$ ikke er definert)



(*) endepunktene
$x = a$, $x = b$

<u>EKS</u> $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ med $D_f = [-1, 7]$

Finn maks. og min. til $f(x)$.

(*) Stasjonære punkter: $f'(x) = 3x^2 - 12x \overset{\text{likn.}}{=} 0$
gir $\underline{x = 0}$, $\underline{x = 4}$

(*) knekkpunkter: ingen fordi $f'(x)$ er definert for alle x.

(*) endepunkter: $\underline{x = -1}$, $\underline{x = 7}$

Disse 4 punktene (x-verdiene) er kandidatpunkter for maks./min.

Regner funksjonsverdiene:

$f(-1) = -2$

$f(0) = 5$

$f(4) = -27$

$f(7) = 54$

Så $x = 4$ gir globalt minimum $\underline{\underline{f(4) = -27}}$

og $x = 7$ gir globalt maksimum $f(7) = \underline{\underline{54}}$

Eks $f(x) = 12 - x$ med $D_f = [3, 10]$

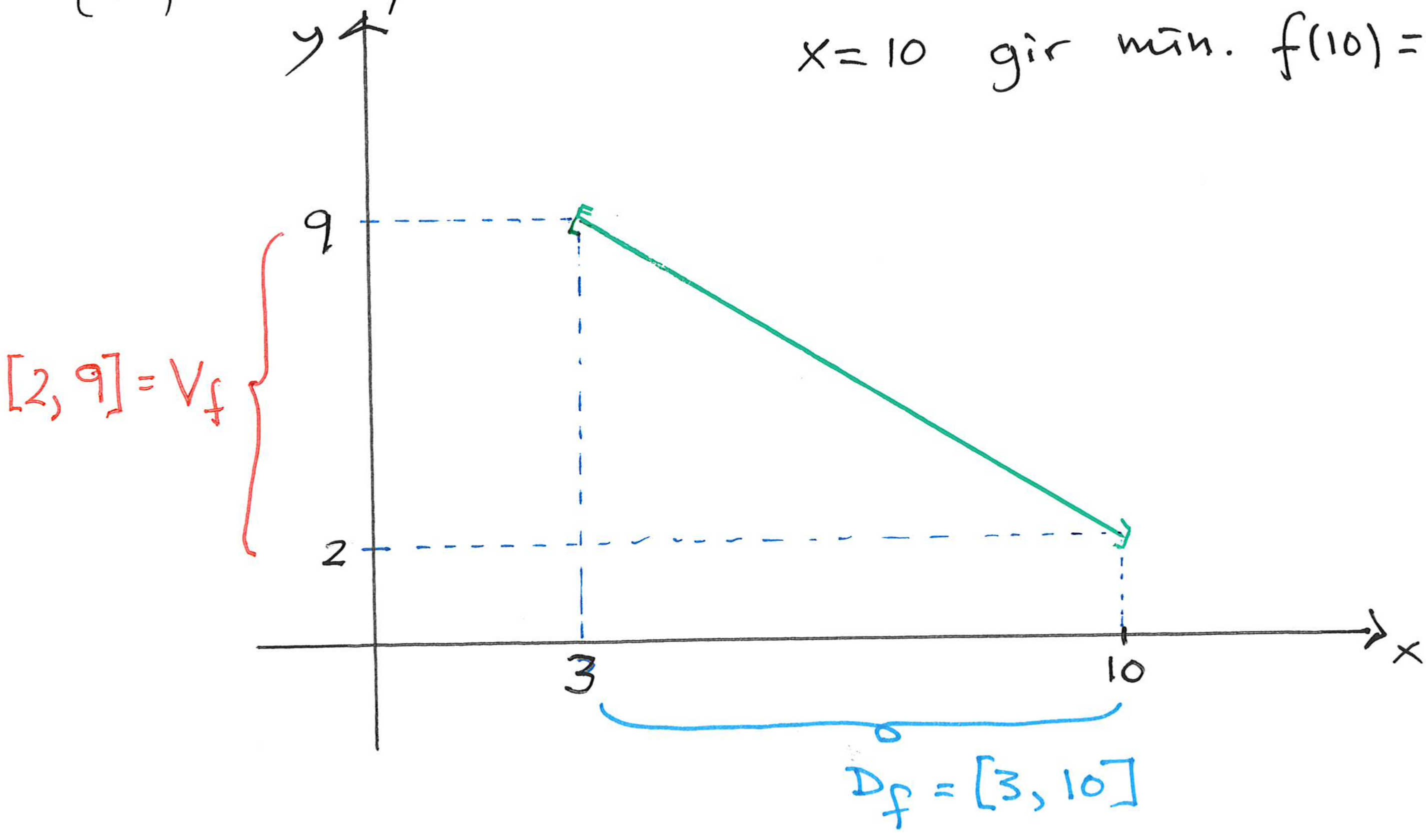
maks/min:

(*) $f'(x) \overset{\text{regner}}{=} -1 \neq 0$ så ingen stasjonære punkter

(*) Ingen knekkpunkter ($f'(x)$ finnes overalt)

(*) endepunkter: $x = 3$ gir maks. $f(3) = \underline{\underline{9}}$

$x = 10$ gir min. $f(10) = \underline{\underline{2}}$



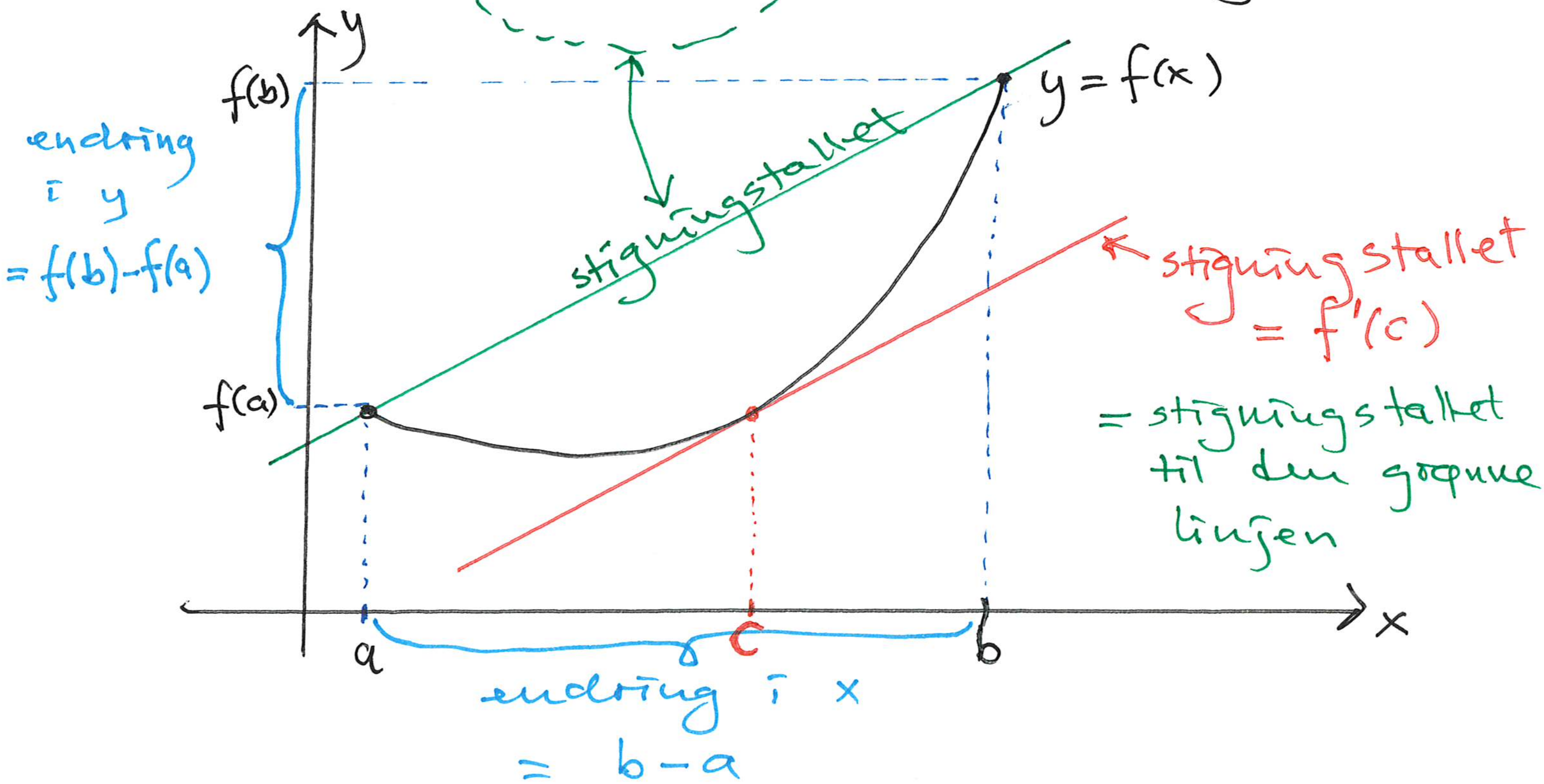
Eks $f(x) = 12 - x$ med $D_f = [3, 10\rangle$

Da er $V_f = \langle 2, 9]$. Så $x = 3$ er fremdeles maksimumspunkt (med maks $f(3) = 9$), men det finnes ingen minimumspunkter og ingen minimumsverdi.

3. Middelverdisetningen

Hvis $f(x)$ er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ og deriverbar (ingen knekkpunkter) så finnes det et tall c mellom a og b $(a < c < b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\text{tot. endring i } y}{\text{tot. endring i } x}$$



Eks $f(x) = e^x + x^2$. Da er $f(0) = e^0 + 0^2 = 1$

og $f(1) = e^1 + 1^2 = e + 1$

Ved middelverdisetningen $(a = 0, b = 1)$ finnes et tall c mellom 0 og 1 slik at

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{e + 1 - 1}{1} = e$$

Merk $f'(x) = e^x + 2x$ (lett). Men vi klarer ikke å løse likningen $f'(x) = e$ dvs

$e^x + 2x = e$ eksakt.