MET 1180, forelesning 17, 22. okt. 2024, Runar Ile

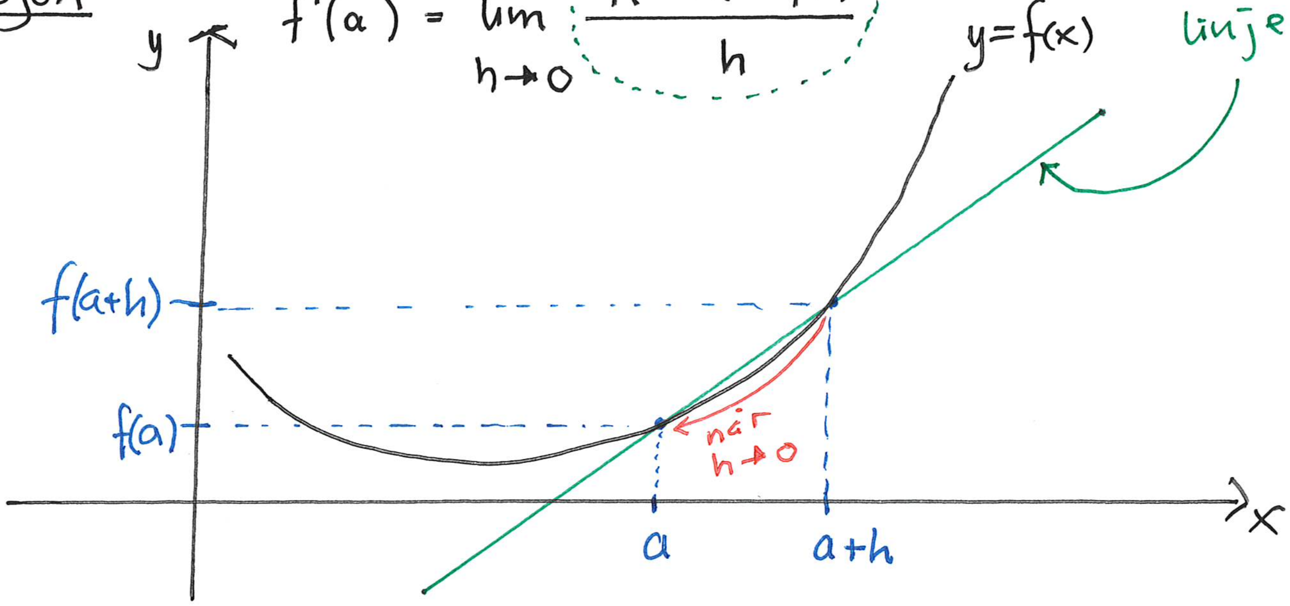
Plan: Repetisjon av derivasjon
1. Definisjon, stigningstall og grafer
2. Den naturlige logaritmen
3. Derivasjonsregler

1. Definisjon, stigningstall og grafer

Definisjon

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

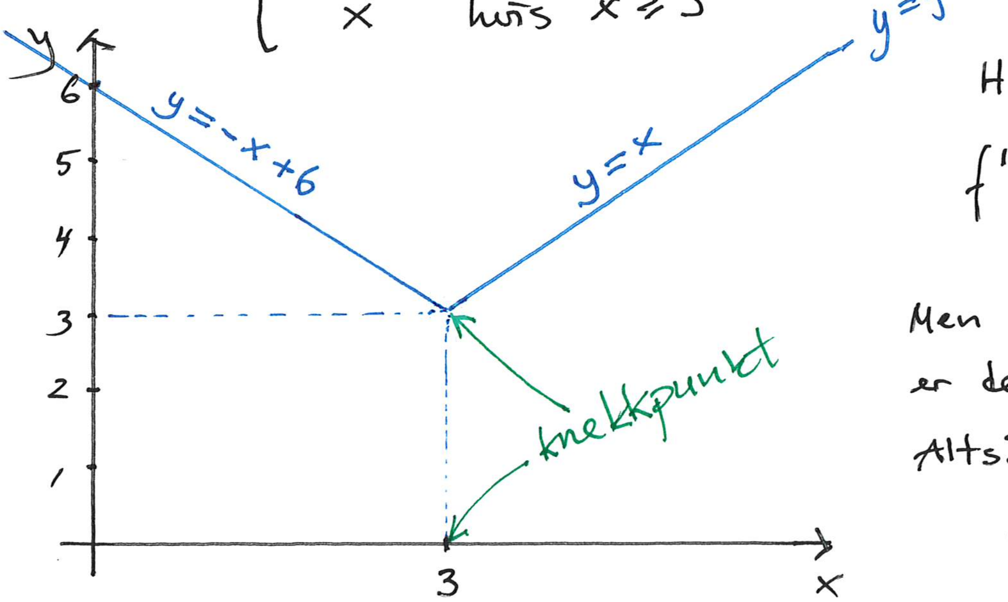
= stigningstallet til denne linjen



Merk Den deriverte finnes ikke alltid!

Eks $f(x) = |x-3|+3 = \begin{cases} -(x-3)+3 & \text{hvis } x<3 \\ x-3+3 & \text{hvis } x \geq 3 \end{cases}$

$$= \begin{cases} -x+6 & \text{hvis } x<3 \\ x & \text{hvis } x \geq 3 \end{cases}$$



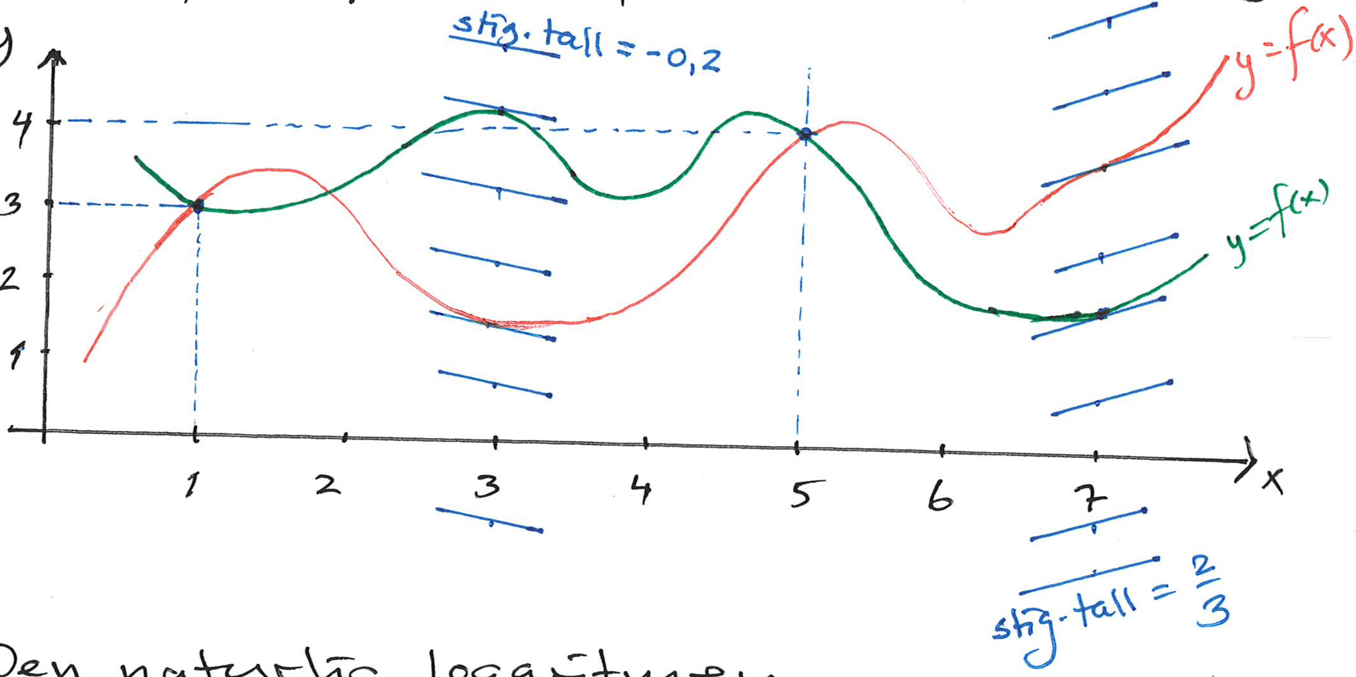
Her er

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x<3 \\ 1 & \text{for } x>3 \end{cases}$$

Men for $x=3$ er det ingen tangent. Altså finnes ikke $f'(3)$.

Oppg 1d Skissér to grafer.

$f(1)=3$, $f'(3)=-0{,}2$, $f(5)=4$, $f'(7)=\frac{2}{3}$



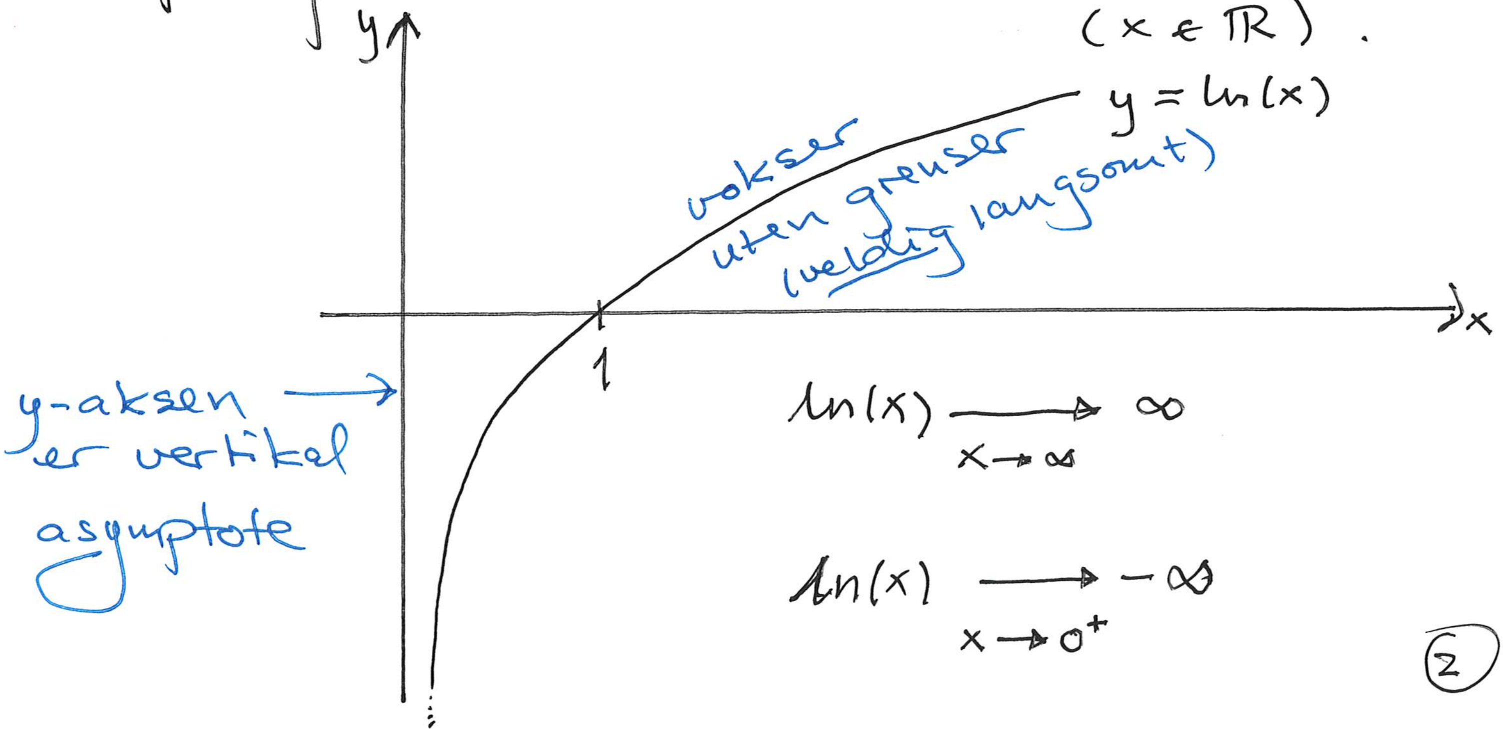
2. Den naturlig logaritmen

$\ln(x)$ er den omvendte funksjonen til e^x

så $\ln(e^x) = x$ og $e^{\ln(x)} = x$.

Definisjonsområdet til $\ln(x)$ er verdimengden til e^x : alle positive tall $(x>0)$

Verdimengden til $\ln(x)$ er definisjonsområdet til e^x : alle tall på tallinjen $(x \in \mathbb{R})$.



$$\ln(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

$$\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$$

Eks $\ln(\sqrt[10]{e}) = \ln(e^{\frac{1}{10}}) = \frac{1}{10} \cdot \ln(e) = \frac{1}{10} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$

$\ln(3e) = \ln(3) + \ln(e) = \underline{\underline{\ln(3) + 1}}$

$e^{2\ln(5)} = e^{\ln(5^2)} = 5^2 = \underline{\underline{25}}$

$\parallel$

$\left(e^{\ln(5)}\right)^2 = (5)^2 = 25$

$e^{\ln(2) + \ln(3)} = e^{\ln(2 \cdot 3)} = e^{\ln(6)} = \underline{\underline{6}}$

Start: 15.05

$\ln(2+3) \neq \ln(2) + \ln(3)$

$= \ln(5) \qquad = 0{,}6931 + 1{,}0986$

$= 1{,}6094 \qquad = 1{,}7917$

Eks $\ln(5x) = \ln(5) + \ln(x)$

$\ln(x^{10}) = 10 \cdot \ln(x)$

$\ln\left(\frac{3}{x-1}\right) = \ln(3) - \ln(x-1)$

3. Derivasjonsregler

Produktregelen : $\left[g(x)\cdot h(x)\right]' = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$

Eks $\left[(x^2+1)\cdot e^x\right]' = (x^2+1)'\cdot e^x + (x^2+1)\cdot (e^x)'$

$= 2x\cdot \underline{e}^x + (x^2+1)\cdot \underline{e}^x$ felles faktor

$= \underline{\underline{(x^2+2x+1)\cdot e^x}}$ null? $x=-1$

Eks $\left[\sqrt{x}\cdot \ln(x)\right]' = (x^{\frac{1}{2}})'\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}}\cdot \left[\ln(x)\right]'$

$= \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}}\cdot \frac{1}{x}$ null?

$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}$

$= \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{x^{1/2}}\cdot \ln(x) + x^{\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}}}$

null? $x = e^{-2}$

pos? $x > e^{-2}$

Brøkregelen

$$\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}$$

Eks $$\left[\frac{x^2}{x-1}\right]' = \frac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}}$$

null? $x=0$, $x=2$

pos? $x>2$

el. $x<0$

Eks $$\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{1-\ln(x)}{x^2}}}$$

null? $x = e$

pos? $0<x<e$

Kjerneregelen $$[g(u(x))]' = g'(u)\cdot u'(x)$$

hvor $u = u(x)$

Eks $$\left[e^{x^2+3x}\right]' = e^u\cdot(2x+3) = \underline{\underline{(2x+3)\cdot e^{x^2+3x}}}$$

Setter $u = u(x) = x^2+3x$ og $g(u) = e^u$

$u'(x) = 2x+3$ $\quad g'(u) = e^u$

null? $x = -\frac{2}{3}$

pos? $x > -\frac{2}{3}$

Eks $$[\ln(x^2+5)]' = \frac{1}{u}\cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+5}}}$$

$u = u(x) = x^2+5$ og $g(u) = \ln(u)$

$u'(x) = 2x$ $\quad g'(u) = \frac{1}{u}$

null? $x = 0$

pos? $x > 0$

Eks $\left[\ln\left(\frac{3x}{x-1}\right)\right]' = \left[\ln(3x) - \ln(x-1)\right]'$

$= \left[\ln(3) + \ln(x) - \ln(x-1)\right]'$

$= 0 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$

$u = x-1, \; g(u) = \ln(u)$

$u' = 1, \; g' = \frac{1}{u}$

$= \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \underline{\underline{\frac{-1}{x(x-1)}}}$

null? - aldri.

Oppg 5, siste $\quad f(x) = \frac{2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

Setter $u = u(x) = 2x+1$ og $g(u) = \frac{2}{u \cdot \sqrt{u}} = 2 \cdot u^{-\frac{3}{2}}$

$u'(x) = 2$

$g'(u) = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot u^{-\frac{3}{2}-1}$

$= -3 \cdot u^{-\frac{5}{2}}$

$= \frac{-3}{u^2 \cdot \sqrt{u}}$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

$= \frac{-3}{u^2\sqrt{u}} \cdot 2$

$= \underline{\underline{\frac{-6}{(2x+1)^2\sqrt{2x+1}}}} = \underline{\underline{-6 \cdot (2x+1)^{-2,5}}}$