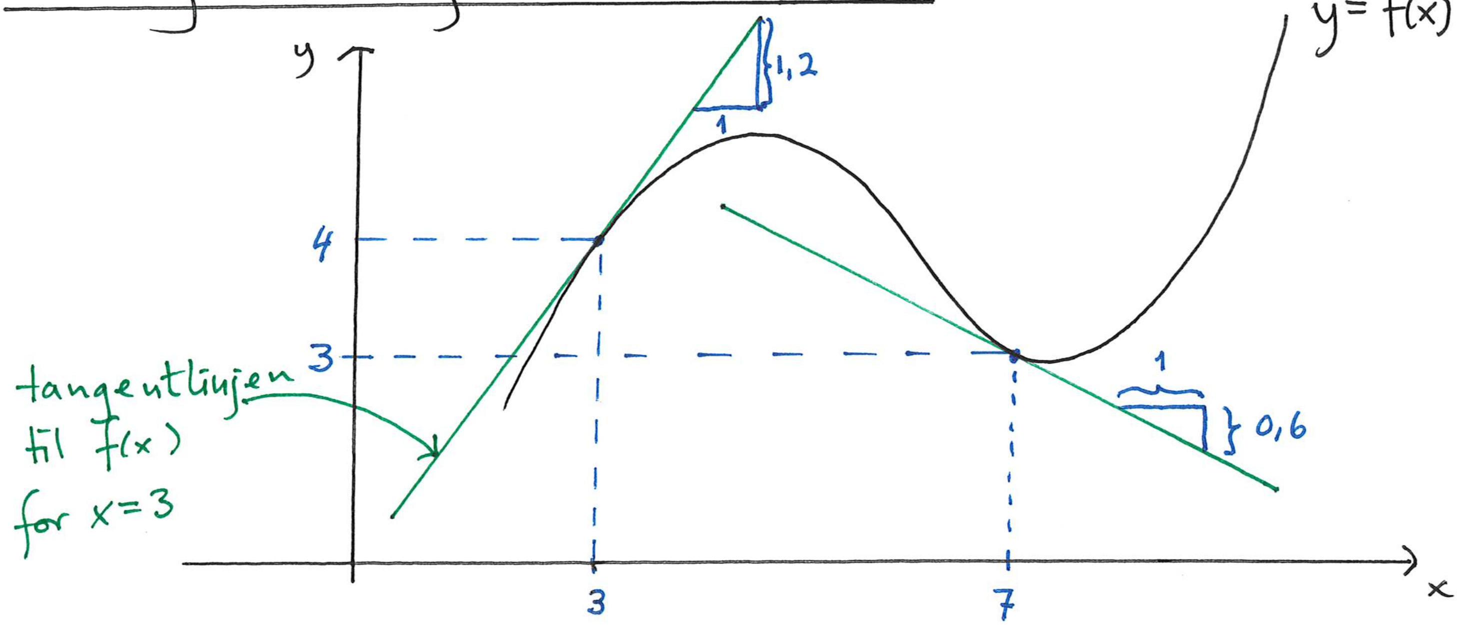
MET 1180, forelesning 16, 17. okt. 2024, Runar Ile

Plan
1. Tangenter og den deriverte
2. Den deriverte som funksjon
3. Derivasjonsreglene

1. Tangenter og den deriverte



- I punktet (3, 4) har tangenten til grafen til $f(x)$ stigningstall 1,2. Vi skriver $f'(3) = 1,2$
- I punktet (7, 3) har tangenten til grafen til $f(x)$ stigningstall −0,6. Vi skriver $f'(7) = -0,6$

To viktige anvendelser

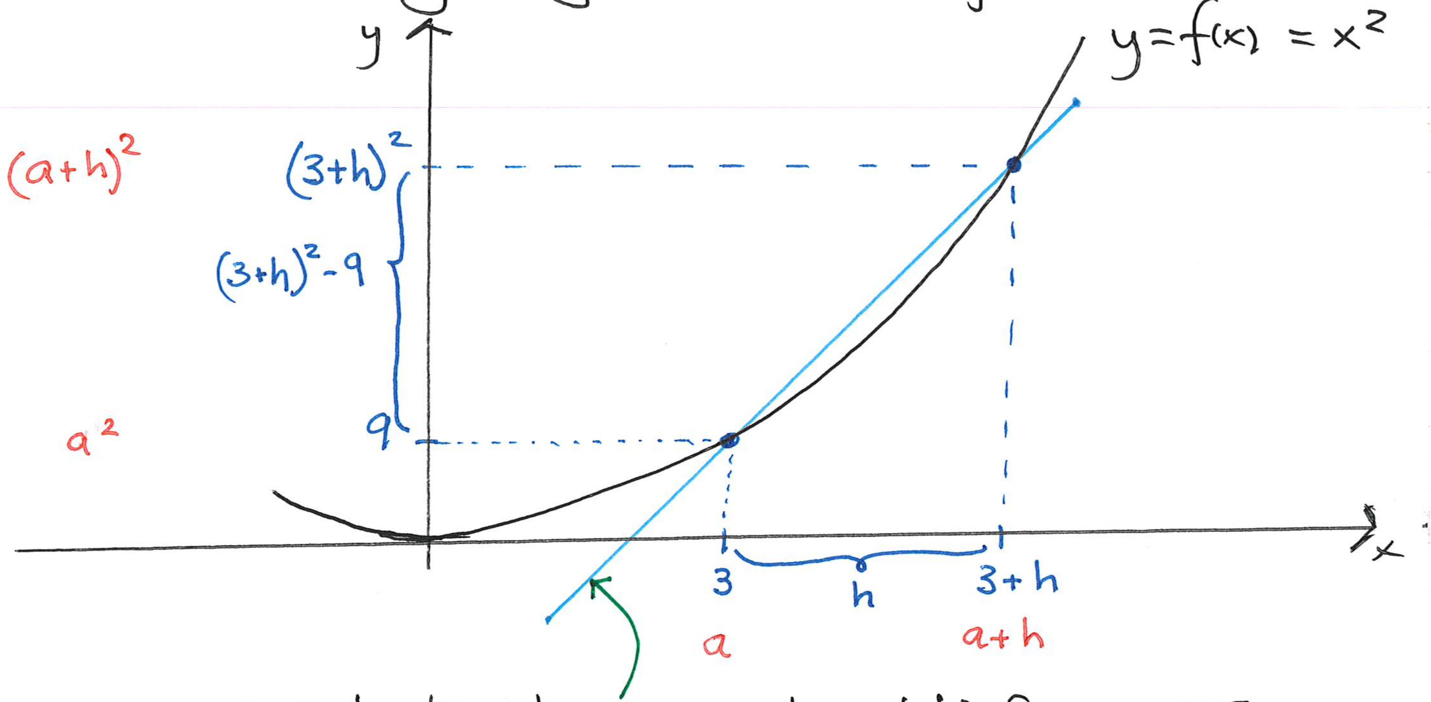
1) Finne hvor funksjoner vokser og avtar og hvor maksimum og minimum er.

2) Tilnærme kompliserte funksjoner med lineære funksjoner.
   - matematiske modeller i økonomi er ofte lineære funksjoner.

Hvordan finner vi stigningstallet til tangenten?

EKS $f(x) = x^2$ i punktet $(3, 9)$

– hva er stigningstallet til tangenten i dette punktet?



Stigningstallet til denne sekantlinjen er

$(a+h)^2 - a^2$ $\quad$ $(a+h)(a+h) - a^2$

$$\frac{\text{endring i } y}{\text{endring i } x} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{(3+h)(3+h) - 9}{h}$$

$a^2 + 2\cdot a\cdot h + h^2 - a^2$ $\quad$ $2ah + h^2$ $\quad$ $h(2a+h)$

$$\frac{9 + 2\cdot 3h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h}$$

$2a + h \xrightarrow[h \to 0]{} 2a$

$= 6 + h \xrightarrow[h \to 0]{} 6$ som derfor er stigningstallet til tangenten til grafen til $f(x)$.

Vi skriver $f'(3) = 6$

På samme måte: $f'(a) = 2a$

2. Den deriverte som en funksjon

I eks. med $f(x) = x^2$ fikk vi $f'(a) = 2a$ – dette er en funksjon. Vi bruker x som variabel og skriver

$$f'(x) = 2x$$

F.eks. er stigningstallet til tangenten til $f(x) = x^2$ i $(-3, 9)$ lik $f'(-3) = 2\cdot(-3) = -6$ og i $(1,1)$ lik $f'(1) = 2\cdot 1 = 2$.

Vi kunne gjort det samme for $f(x) = x^3$ og fått $f'(x) = 3x^2$.

Start: 9.01

---

3. Derivasjonsregler

Potensregelen $f(x) = x^n$ gir $f'(x) = nx^{n-1}$

NB: Gjelder for alle tall n.

EKS $f(x) = x^{10}$ gir $f'(x) = 10x^9$ $(n = 10)$

EKS $f(x) = \sqrt[3]{x}$ så $f'(x) = \frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1}$ $(n = \frac{1}{3})$

$= x^{\frac{1}{3}}$ $\qquad = \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$$

Addisjonsregelen $f(x) = g(x) + h(x)$

så er $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

Eks $f(x) = x + x^3$, $f'(x) = 1 + 3x^2$

Konstantregelen Hvis k er et konstant tall

og $f(x) = k \cdot g(x)$ så er $f'(x) = k \cdot g'(x)$

Eks $k=7$, $g(x) = x^2$. Da er $f(x) = 7x^2$

så $f'(x) = 7 \cdot 2x = 14x$

Produktregelen

Hvis $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, så er

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Eks $f(x) = x^2$, så $g(x) = x$, $h(x) = x$

$g'(x) = 1$, $h'(x) = 1$

Da er $f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

Eks $f(x) = (5x^3 - 2x + 1) \cdot (3x + 7)$

Beregner $f'(x)$ ved å bruke produktregelen

$g(x) = 5x^3 - 2x + 1$ $\quad$ $h(x) = 3x + 7$

$g'(x) = 15x^2 - 2$ $\quad$ $h'(x) = 3$

$$f'(x) = (15x^2 - 2)(3x + 7) + (5x^3 - 2x + 1) \cdot 3$$

$$= \underline{\underline{60x^3 + 105x^2 - 12x - 11}}$$

Brøkregelen

Har $\quad f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

Da er $\quad f'(x) = \dfrac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

Eks $\quad f(x) = \dfrac{3x+1}{2x+5}$

Setter $\quad g(x) = 3x+1 \quad$ og $\quad h(x) = 2x+5$

$g'(x) = 3 \qquad h'(x) = 2$

paranteser!

$$f'(x) = \frac{3\cdot(2x+5) - (3x+1)\cdot 2}{(2x+5)^2}$$

minus!

$$= \frac{3\cdot 2x + 3\cdot 5 - (3x\cdot 2 + 1\cdot 2)}{(2x+5)^2}$$

husk denne!

$$= \frac{6x + 15 - 6x - 2}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{13}{(2x+5)^2}$$

vanligvis best å ikke regne ut nevneren.

Kjerneregelen

Hvis $f(x) = g(\underbrace{u(x)}_{\text{den indre funksjonen}})$

den ytre funksjonen $g(u)$

Da er

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

hvor $u = u(x)$

Eks $f(x) = (x^2+3)^{10}$

Setter $u = u(x) = x^2+3$ og $g(u) = u^{10}$

$u'(x) = 2x$ $\qquad g'(u) = 10u^9$

Da er $f'(x) = 10u^9 \cdot 2x = 10 \cdot (x^2+3)^9 \cdot 2x$

$$= \underline{\underline{20x(x^2+3)^9}}$$

To funksjoner

$f(x) = e^x$ $\qquad g(x) = \ln(x)$

$f'(x) = e^x$ $\qquad g'(x) = \dfrac{1}{x}$

Eks $f(x) = e^{3x}$

$u(x) = 3x$ og $g(u) = e^u$

$u'(x) = 3$ $\qquad g'(u) = e^u$

Så $f'(x) = \underline{\underline{3e^{3x}}}$

Eks $f(x) = \ln(x^2+1)$

$u(x) = x^2+1$ og $g(u) = \ln(u)$

$u'(x) = 2x$ $\qquad g'(u) = \dfrac{1}{u}$

Så $f'(x) = 2x \cdot \dfrac{1}{u}$

$$= 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+1}}}$$