MET 1180, forelesning 15, 15. okt. 2024, Runar Ile

Plan: Repetisjon
1. Omvendte funksjoner
2. Logaritme- og eksponensialfunksjoner
3. Asymptoter

---

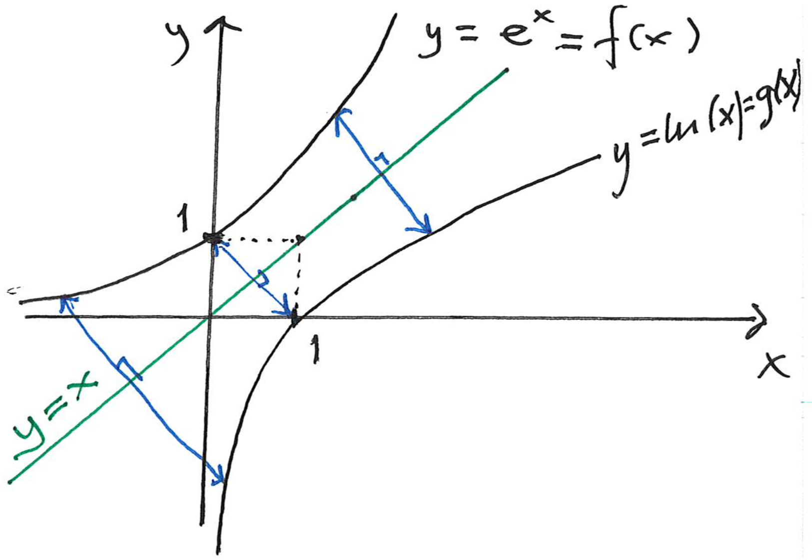
1. Omvendte funksjoner

Definisjonen:

$f(g(x)) = x$ for alle x i D_g

$g(f(x)) = x$ — " — D_f

*) Grafene er symmetriske om linjen $y = x$



*) For at $f(x)$ skal ha en omvendt funksjon, må $f(x)$ enten være strengt voksende eller strengt avtagende

*) $D_g = V_f$ og $V_g = D_f$

Hvordan finner vi $g(x)$ og D_g i praksis?

Oppg 5d $\quad f(x) = 20 + \dfrac{1}{x-3}$, $D_f = \langle 3, \rightarrow \rangle$

(1) Løser likningen $y = f(x)$ for x.

dvs $\quad y = 20 + \dfrac{1}{x-3} \quad \Big| \cdot (x-3)$

$$y \cdot (x-3) = 20 \cdot (x-3) + 1$$

$$yx - 3y = 20x - 60 + 1 = 20x - 59$$

$$yx - 20x = 3y - 59$$

$$(y-20)x = 3y - 59 \quad |:(y-20)$$

$$x = \frac{3y-59}{y-20}$$

$$x \overset{\text{polyn. div.}}{=} 3 + \frac{1}{y-20}$$

② Bytter variablene $(y \longleftrightarrow x)$

$$\underline{\underline{y = g(x) = 3 + \frac{1}{x-20}}}$$

③ Setter $D_g = V_f$ og finner V_f:

V_f = mengden av mulige y-verdier for $f(x)$ når x varierer i D_f.

Merk at $f(x) \xrightarrow[x \to 3^+]{} \infty$ og

$f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 20^+$ så $D_g = V_f = \underline{\underline{\langle 20, \rightarrow \rangle}}$

alt.: $x > 20$

2. Logaritme- og eksponensialfunksjoner

Oppg 6 Har $\ln(2) = 0{,}6931$, $\ln(3) = 1{,}0986$ og $\ln(5) = 1{,}6094$. Da har vi (uten å bruke ln på kalk.)

d) $$\ln\left(\frac{1000\,000}{27}\right) = \ln(10^6) - \ln(3^3)$$

$$= 6\cdot\ln(10) - 3\cdot\ln(3)$$

$$= 6(\ln(2)+\ln(5)) - 3\cdot\ln(3)$$

$$= 6\cdot(0{,}6931 + 1{,}6094) - 3\cdot 1{,}0986 = \underline{\underline{10{,}5192}}$$

f) $$\ln(\sqrt[10]{6}) = \ln(6^{\frac{1}{10}}) = \frac{1}{10}\cdot\ln(6) = \frac{\ln(2)+\ln(3)}{10}$$

$$= \underline{\underline{0{,}1792}}$$

$f(x) = a^x$ med D_f = alle tall på tallinjen

$a > 0$, $a \neq 1$

$g(x) = \log_a(x)$, $D_g = \langle 0, \rightarrow\rangle = V_f$.

Eks Hvor lang tid tar det å doble innskuddet på en konto med 3% rente?

Løsning $f(x) = 1{,}03^x$ er balansen etter x år hvis innskuddet var 1.

Vi må løse likningen $f(x) = 2$ dvs

$$1{,}03^x = 2 \quad (*)$$

dvs $x = \underline{\log_{1{,}03}(2)}$

Men, kan ikke regne dette ut direkte på BI-kalk. I stedet kan vi sette VS og HS av $(*)$ inn i $\ln(x)$.

Får $\ln(1{,}03^x) = \ln(2)$

$$x \cdot \ln(1{,}03) = \ln(2) \quad \Big| : \ln(1{,}03)$$

$$x = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)} \approx \underline{\underline{23{,}45}}$$

Dvs $\log_{1{,}03}(2) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)}$

Mønster: $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Start: 15.05

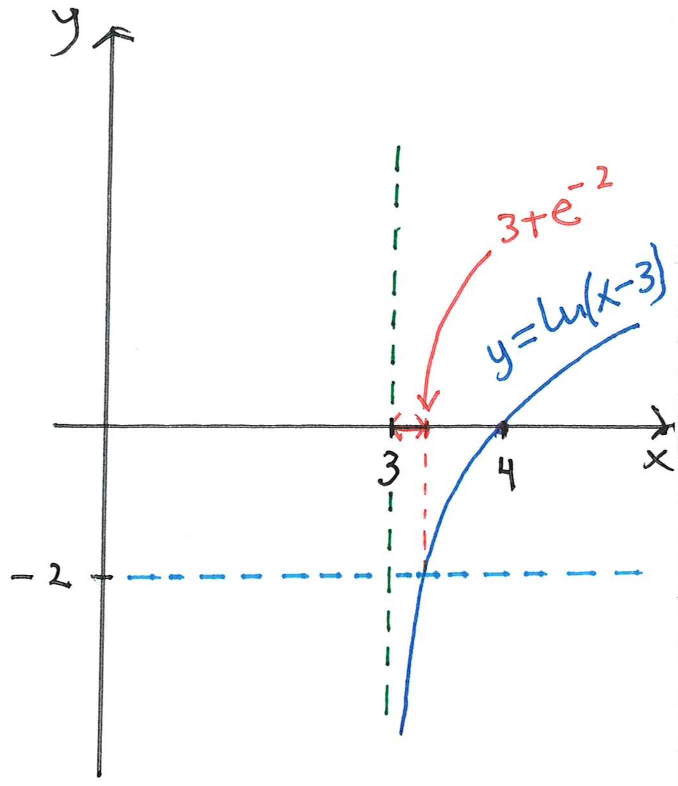
<u>Oppg 8c</u> $\ln(x-3) < -2$

Fordi e^x er strengt <u>voksende</u> kan vi sette VS og HS inn i e^x å få en <u>ekvivalent</u> ulikhet

$$e^{\ln(x-3)} < e^{-2}$$

$$x-3 < e^{-2}$$

$$x < 3+e^{-2}$$



Men den opprinnelige ulikheten er bare definert for $x > 3$, så løsningsmengden er $\underline{\underline{\langle 3,\ 3+e^{-2}\rangle}}$

<u>Oppg 8e</u> $\dfrac{3e^x}{e^x+1} < 5$

Men her er det enklere å multiplisere BS med e^x+1 som er et positivt tall for alle x.

$$3e^x < 5(e^x+1) = 5e^x+5$$

$$-5 < 2e^x \quad |:2$$

$$-\frac{5}{2} < e^x$$

og dette er sant for $\underline{\underline{\text{alle tall } x}}$

Kan løses ved å bruke substitusjonen $u = e^x$ som gir

$$\frac{3u}{u+1} < 5$$

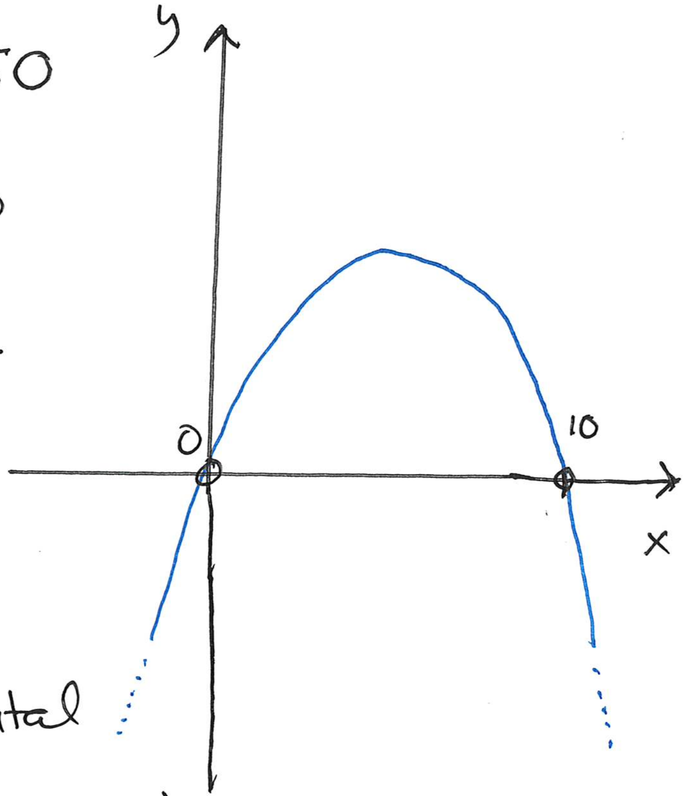
$$\frac{3u}{u+1} - 5 < 0$$

- felles brøk
- fortegnsskjema
- bruke $u = e^x$

3. Asymptoter

Oppg 9 Bestem asymptotene til $f(x)$.

b) $f(x) = e^{x(10-x)} + 50$



Merk at $x(10-x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty$

Altså $e^{x(10-x)} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0^+$

så $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 50^+$

og $\underline{\underline{y = 50}}$ er en horisontal asymptote (både $x \to \infty$ og $x \to -\infty$)

d) $f(x) = \ln(10-x)$

Hvis $x \to 10^-$ vil $10 - x \to 0^+$ og

$f(x) = \ln(10-x) \xrightarrow[x \to 10^-]{} -\infty$

så $\underline{\underline{x = 10}}$ er en vertikal asymptote for $f(x)$.

f) $f(x) = \ln(\underbrace{120x + 10}_{\text{pos. i } D_f}) - \ln(\underbrace{20x - 30}_{\text{pos. i } D_f})$

$D_f = \langle \frac{3}{2}, \rightarrow \rangle$

$= \ln\left(\dfrac{120x + 10}{20x - 30}\right)$

Merk at $\dfrac{120x+10}{20x-30} \xrightarrow[x \to \infty]{} \dfrac{120}{20} = 6$ så

$f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \ln(6)$ og $\underline{\underline{y = \ln(6)}}$ er en horisontal asymptote.

Merk også $\dfrac{120x + 10}{20x - 30} \xrightarrow[x \to \frac{3}{2}^+]{} \infty$

så $\underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$ er en vertikal asymptote.