MET 1180, forelesning 14, 10. okt. 2024, Runar Ile

Plan
1. Omvendte funksjoner
2. Eksponentialfunksjoner
3. Logaritmer

1. Omvendte funksjoner

Aspekter ved funksjoner
- et uttrykk
- en funksjonsverditabell
- graf
- situasjoner

Eks $f(x) = (x-3)^2$

med definisjonsområde

$D_f = [3, \rightarrow\rangle$ (så $x \geq 3$)

Funksjonsverditabell

x	3	4	5	6	7	....	$g(x)$
$f(x)$	0	1	4	9	16	....	x

← den omvendte funksjonen

så $g(0) = 3$, $g(1) = 4$, $g(4) = 5$, ...

$f(\overbrace{g(0)) = f(3)} = 0$ $\qquad$ $g(\overbrace{f(3)) = g(0)} = 3$

$f(\overbrace{g(1)) = f(4)} = 1$ og $g(\overbrace{f(4)) = g(1)} = 4$

$f(\overbrace{g(4)) = f(5)} = 4$ $\qquad$ $g(\overbrace{f(5)) = g(4)} = 5$

Definisjon $f(x)$ med definisjonsmengde D_f og
$g(x)$ ——— " ——— D_g

er omvendte funksjoner hvis

$f(g(x)) = x$ for alle x i D_g og $g(f(x)) = x$ for alle x i D_f

Fakta Definisjonsmengden til $g(x)$ er lik verdimengden til $f(x)$, dvs $D_g = V_f$.

Fordi $f(x)$ er den omvendte funksjonen til $g(x)$ vil også $V_g = D_f$.

Hvordan finne uttrykket for den omvendte funksjonen?

(1) Løs likningen $y = f(x)$ for x. Får $x = g(y)$.

(2) Bytter variablene x og y. Får $g(x)$.

(3) Setter $D_g = V_f$ og finner V_f.

Eks $f(x) = (x-3)^2$ med $D_f = [3, \rightarrow\rangle$.

Vil finne den omvendte funksjonen $g(x)$ med D_g.

(1) Løser likningen $y = (x-3)^2$ for x.

- tar kvadratroten på begge sider

$$\sqrt{y} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{hvis } x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{hvis } x < 3 \end{cases}$$

så $\sqrt{y} = x-3$ fordi $x \in D_f = [3, \rightarrow\rangle$

dvs $x = 3+\sqrt{y}$

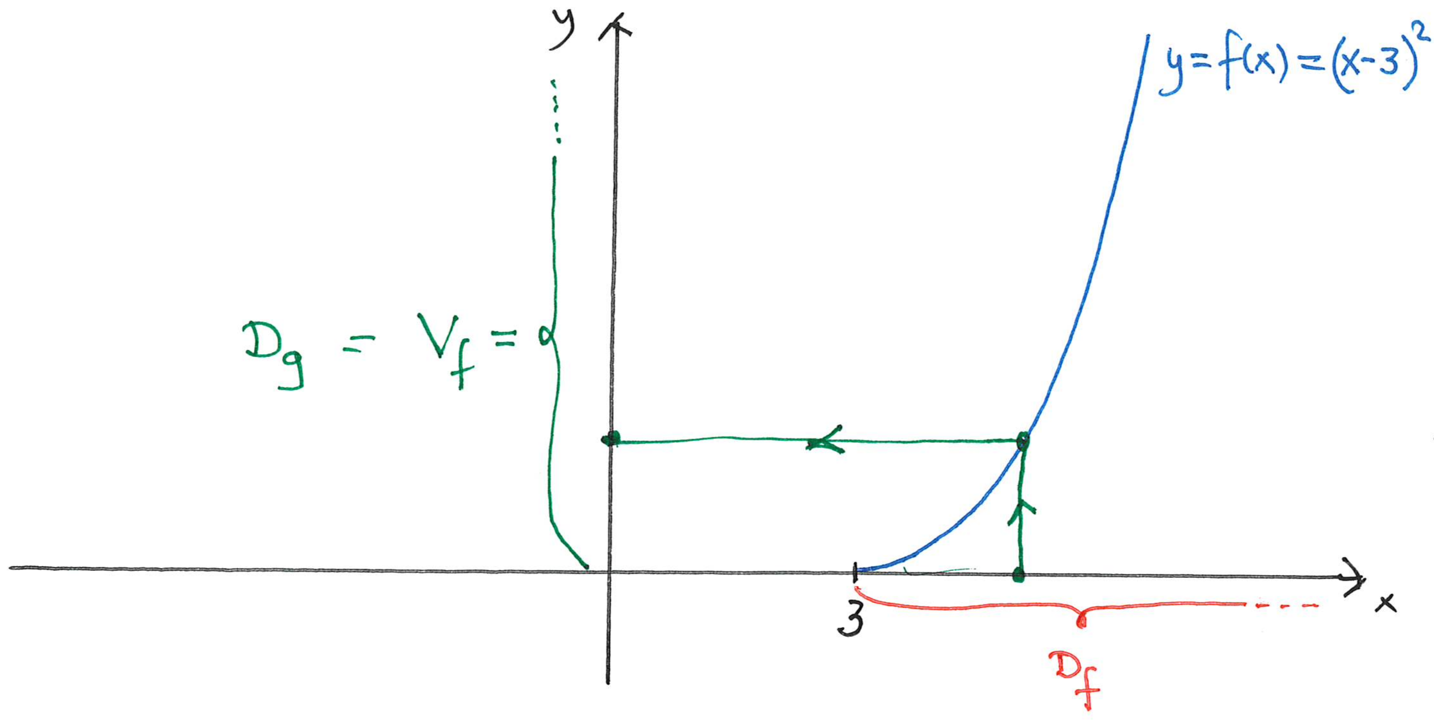
(2) Bytter variabler: $y = \underline{3+\sqrt{x} = g(x)}$.

(3) $D_g \overset{\text{alltid}}{=} V_f \overset{\text{påstand}}{=} [0, \rightarrow\rangle$ fordi $f(x) = (x-3)^2 = y$

har en løsning med $x \geq 3$ for alle $y \geq 0$

Konklusjon Den omvendte funksjonen er

$g(x) = 3+\sqrt{x}$ med $D_g = [0, \rightarrow\rangle$



<u>Merk</u> $f(g(x)) = (g(x)-3)^2 = (3+\sqrt{x}-3)^2 = x$

og $g(f(x)) = 3+\sqrt{f(x)} = 3+\sqrt{(x-3)^2} = 3+(x-3) = x$

fordi $x \geq 3$

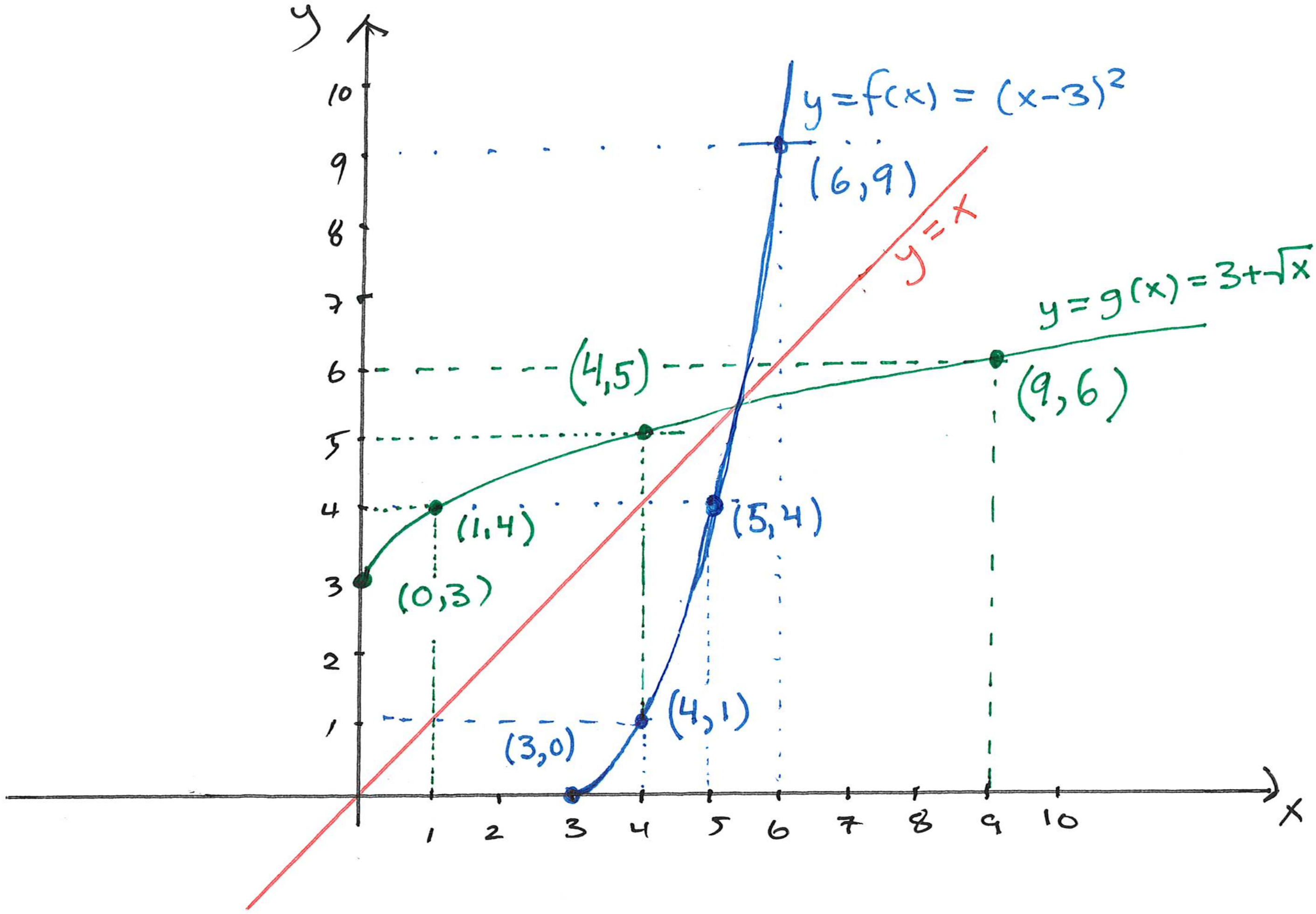
$\boxed{\text{Start: 9.02}}$

Grafen til den omvendte funksjonen

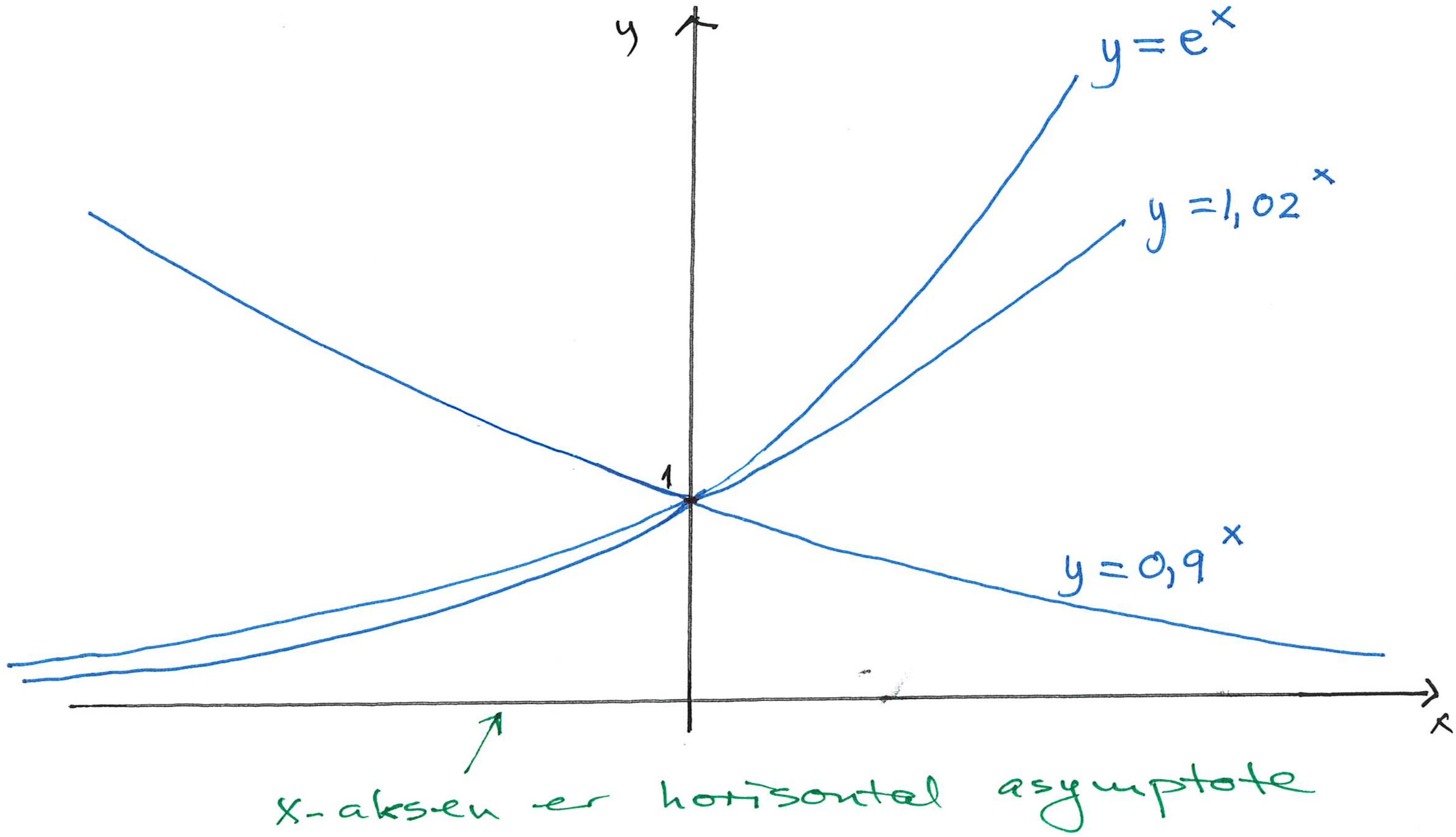
– er speilbildet av grafen til $f(x)$ med hensyn på „diagonalen" $y = x$

<u>Eks</u> $f(x) = (x-3)^2$ med $D_f = [3, \rightarrow \rangle$

x	3	4	5	6	7	...	$g(x)$
$f(x)$	0	1	4	9	16	...	x



2. Eksponentialfunksjoner



$a > 1$ $f(x) = a^x$ er strengt voksende uten øvre begrensning

og $f(x) = a^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^+$ (men $a^x > 0$ for alle x)

$0 < a < 1$ $f(x) = a^x$ er strengt avtagende uten øvre begrensning

og $f(x) = a^x \xrightarrow[x \to \infty]{} 0^+$ (men $a^x > 0$ for alle x)

I begge tilfellene er D_f = alle tallene på tallinjen ($= \mathbb{R}$)

og $V_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Potensregler Hvis $f(x) = a^x$ så har vi at

$$f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$$

og
$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a^x} = a^{-x} = f(-x)$$

---

3. Logaritmer Antar $a > 0$ og $a \neq 1$

Da er $g(x) = \log_a(x)$ den omvendte funksjonen til $f(x) = a^x$ og $D_g = V_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$

og $V_g = D_f$ = alle tall

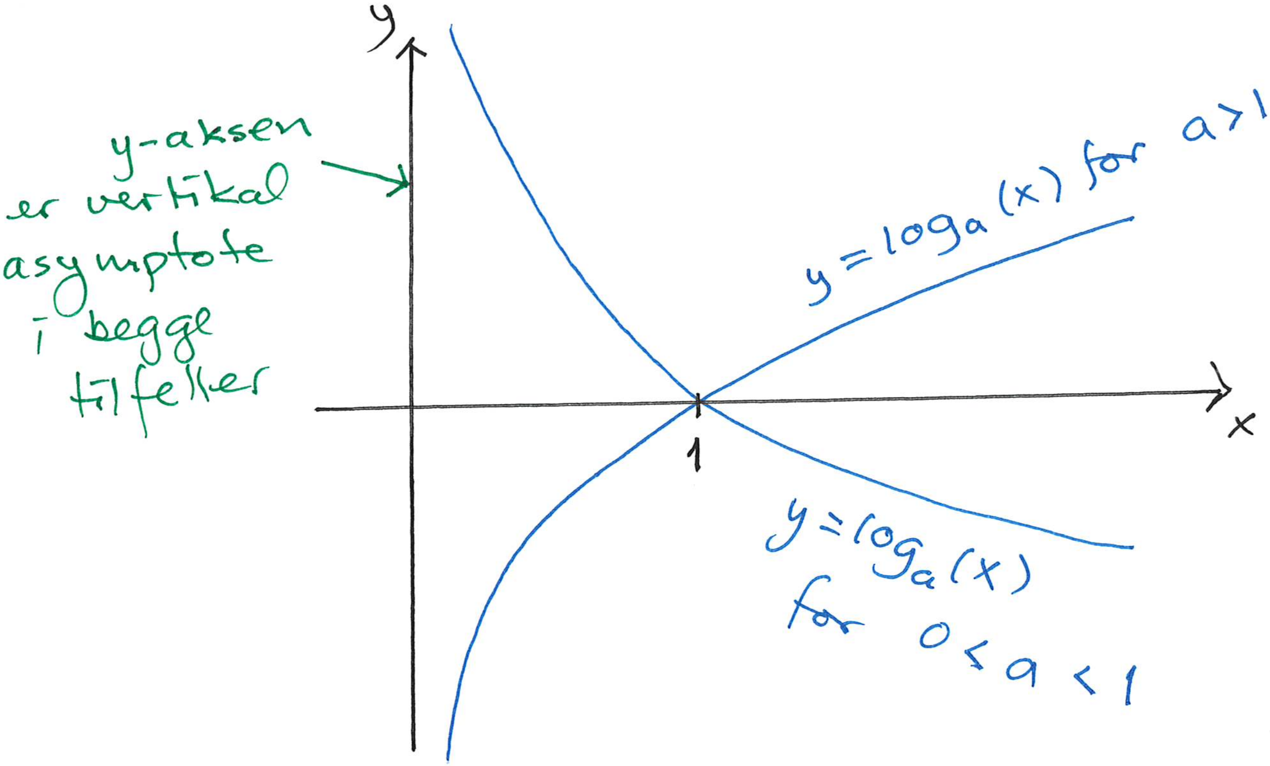
Eks $a = 2$, $\log_2(10)$ = tallet som 2 må opphøyes i for å gi 10.

(så $2^{\log_2(10)} = 10$)

Fordi $2^{3,322} \approx 10$

er $\log_2(10) \approx 3,322$. $\log_2(x)$ er den omvendte funksjonen til 2^x

Grafer



Regneregler

① $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

f.eks. $\log_2(10) = \log_2(5) + \underbrace{\log_2(2)}_{1}$

② $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

③ $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

Definisjon $\ln(x) = \log_e(x)$, e = Eulers tall

– kalles den naturlige logaritmen

$\ln(x)$ er den omvendte funksjonen til e^x

så $e^{\ln(x)} = x$ og $\ln(e^x) = x$