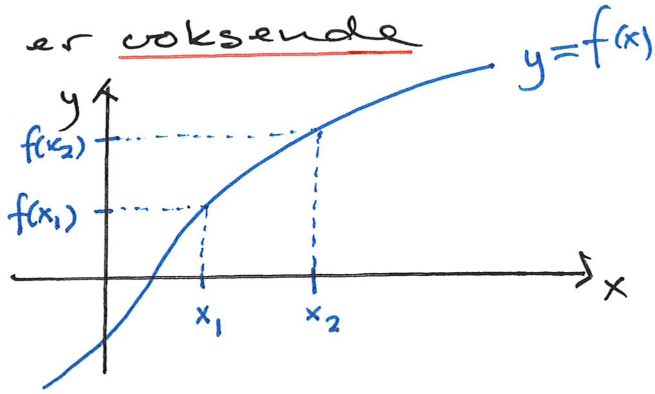
MET 1180, forelesning 12, 3. okt. 2024, Runar Ile

Plan
1. Voksende og avtagende funksjoner
2. Sirkler og ellipser
3. Polynomfunksjoner

1. Voksende og avtagende funksjoner



Definisjon En funksjon $f(x)$ er voksende hvis for alle $x_1 < x_2$ så gjelder $f(x_1) \leq f(x_2)$

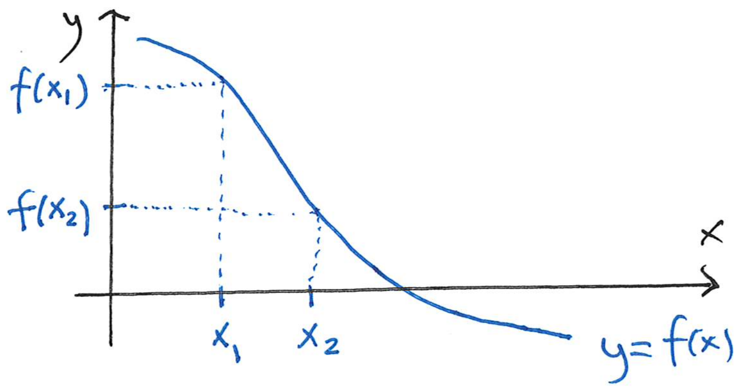
Eks $f(x) = 2x+5$ er voksende fordi:

Anta $x_1 < x_2 \quad | \cdot 2$

$2x_1 < 2x_2 \quad | +5$

$f(x_1) = 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 = f(x_2)$

Altså er $f(x)$ (strengt) voksende.



Definisjon En funksjon $f(x)$ er avtagende hvis for alle $x_1 < x_2$ så gjelder $f(x_1) \geq f(x_2)$

Oppg Vis at $f(x) = -2x+5$ er (strengt) avtagende.

Løsning Anta $x_1 < x_2 \quad | \cdot (-2)$

$-2x_1 > -2x_2 \quad | +5$

$f(x_1) = -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 = f(x_2)$

Altså er $f(x)$ strengt avtagende

<u>Oppg</u> Vi har konstantfunksjonen $f(x) = 5$. Avgjør om $f(x)$ er voksende, avtagende eller ingen av delene.

<u>Løsning</u>

Voksende: Hvis $x_1 < x_2$ så vil $f(x_1) = 5 \leq 5 = f(x_2)$

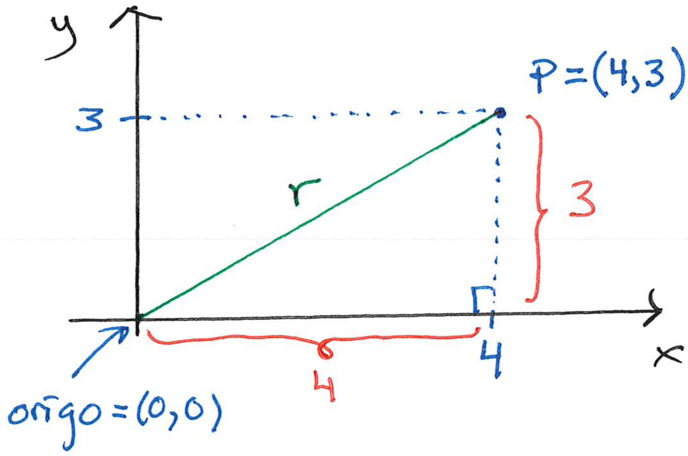
Avtagende: Hvis $x_1 < x_2$ så vil $f(x_1) = 5 \geq 5 = f(x_2)$

<u>Konkl</u>: $f(x)$ er både voksende og avtagende.

Men $f(x)$ ikke strengt voksende og ikke strengt avtagende.

---

2. Sirkler og ellipser



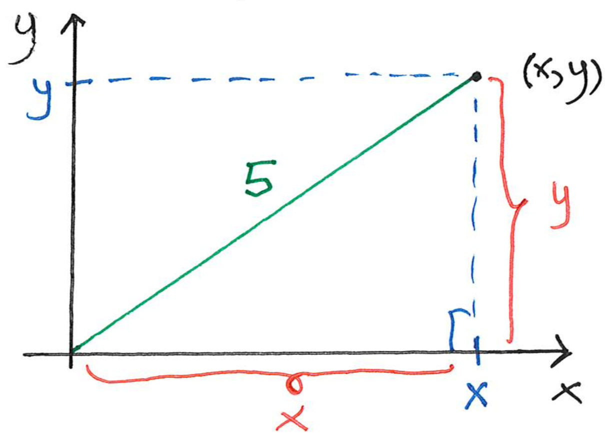
Pytagoras:

$r^2 = 4^2 + 3^2 \quad (r \geq 0)$

$r^2 = 16 + 9 = 25$

$r = \sqrt{25} = 5$

Anta punktet (x,y) ligger 5 fra origo.



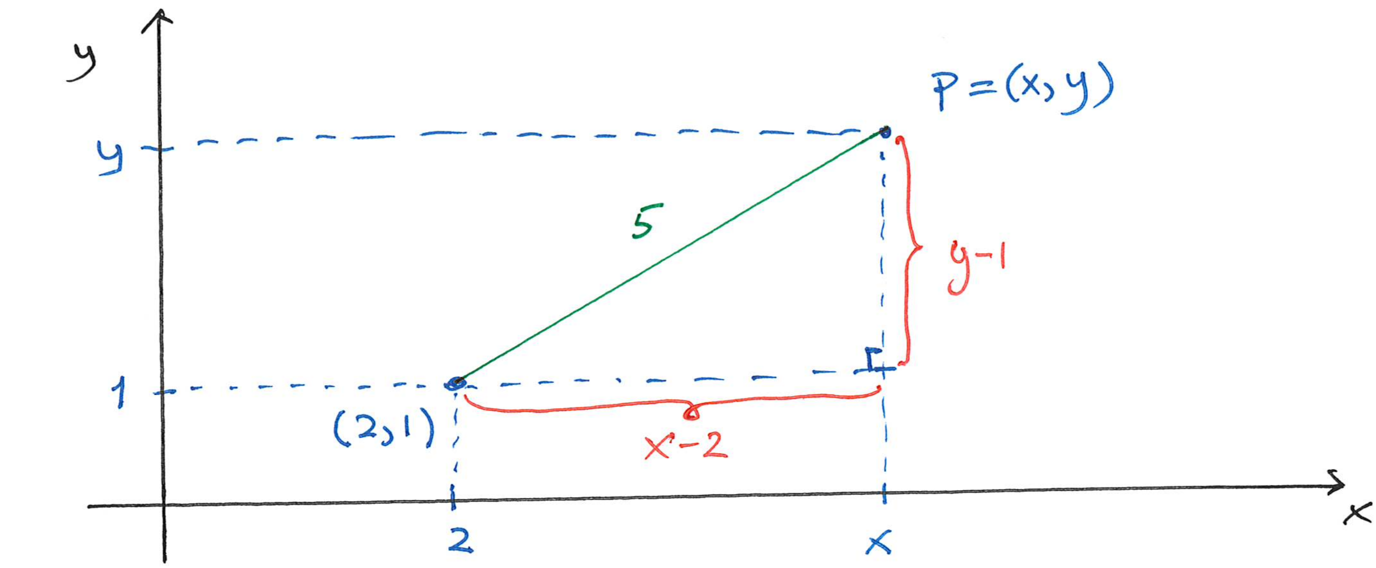
Pytagoras:

$25 = 5^2 = x^2 + y^2$

- én likning med <u>to</u> ukjente
- uendelig mange løsninger.

Løsningene er alle punkter (x,y) på sirkelen med radius 5 og sentrum $(0,0)$.

Eks Hva er likningen til punktene på en sirkel med radius 5 og sentrum $(2,1)$?



Pytagoras: $$5^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

$$25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

dvs $$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$$

Start: 9.09

Eks Bestem radius og sentrum til sirkelen gitt ved likningen

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = -9$$

Løsning $$\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1} + \underbrace{(y+3)^2}_{y^2+6y+9} = -9+1+9 = 1$$

Sentrum: $(1,-3)$, radius $= \sqrt{1} = 1$

Ellipser

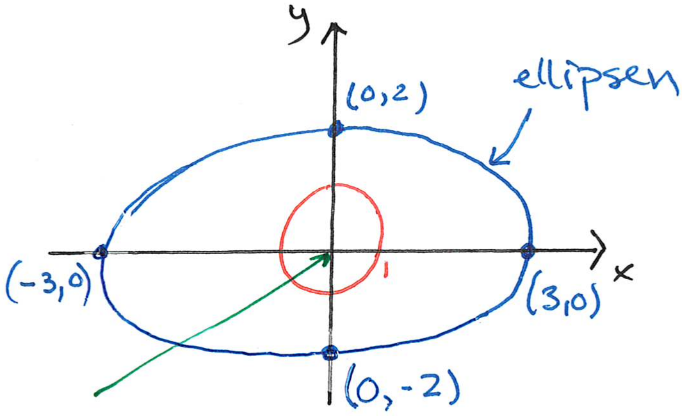
Eks $4x^2 + 9y^2 = 36$

x	3	-3	0	0
y	0	0	2	-2

Deler begge sider av likningen med 36

$$\underbrace{\frac{4}{36}}_{=\frac{1}{9}} x^2 + \underbrace{\frac{9}{36}}_{=\frac{1}{4}} y^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$



sentrum i ellipsen
(= origo i dette tilfellet)

Dette minner om en sirkellikning, men x-aksen er strukket med faktor 3
y-aksen —— " —— 2

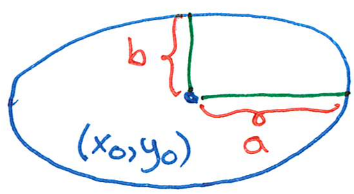
Generelt Enhver ellipse er løsningene på en likning på formen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Her er (x_0, y_0) sentrum i ellipsen, og a og b er horisontal og vertikal halvakse

I eks. over er $(x_0, y_0) = (0,0)$

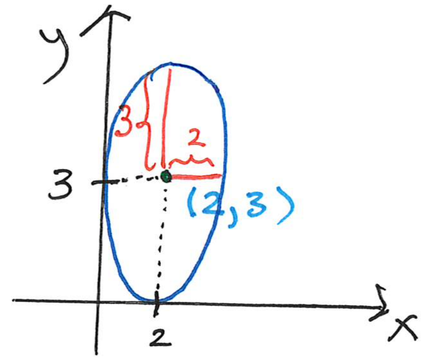
$a = 3$, $b = 2$



<u>Eks</u> $$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

Sentrum: $(2,3)$

Halvakser: $a = \sqrt{4} = 2$, $b = \sqrt{9} = 3$



---

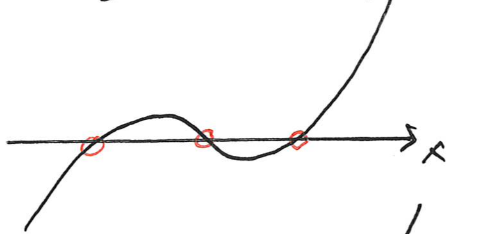
3. Polynomfunksjoner

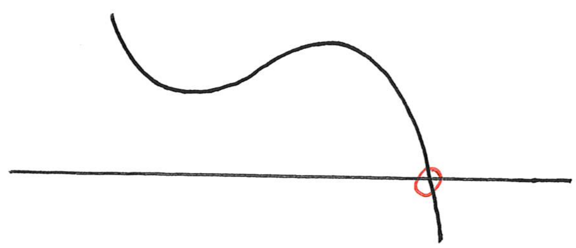
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

er en polynomfunksjon av grad n, skriver grad(f) = n.

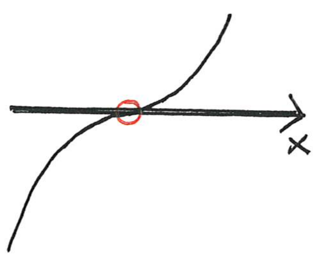
- $f(x)$ maksimalt n røtter (nullpunkter)
- Hvis graden er et oddetall, har $f(x)$ minst én rot.
- Hvis $h(x)$ er en polynomfunksjon med m røtter er $\text{grad}(h) \geq m$

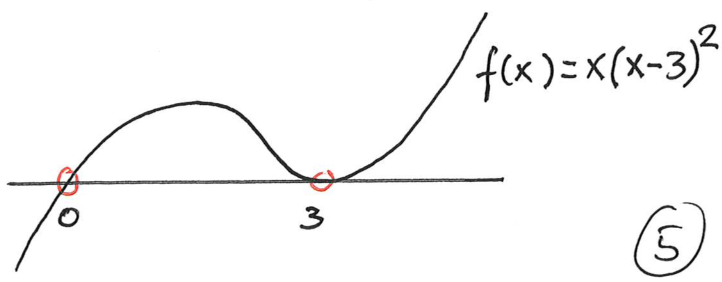
<u>Eks</u> (grad 3)





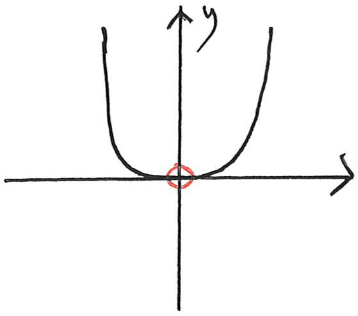
$f(x) = x^3$:





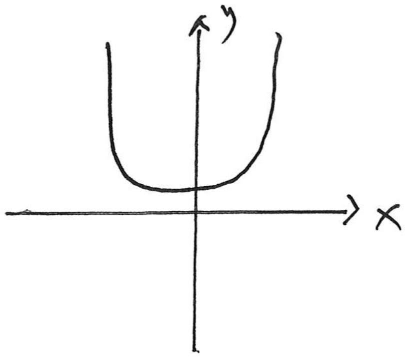
Eks (grad 4)

$f(x) = x^4$



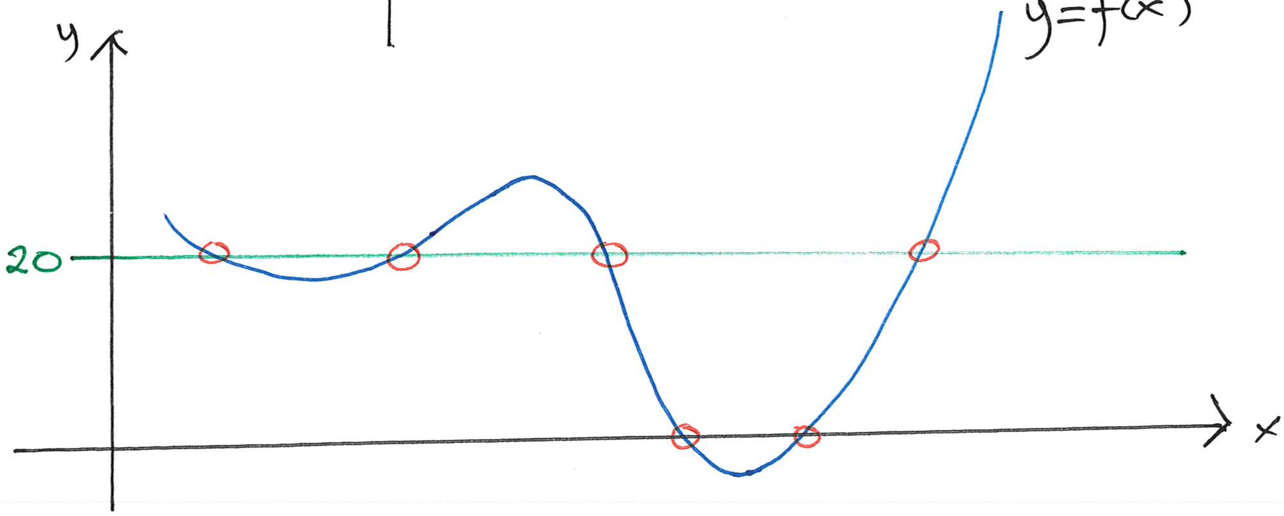
– én rot

$f(x) = x^4 + 1$



– ingen røtter

Eks



Likningen $f(x) = 20$ har 4 løsninger, dvs

at $f(x) - 20 = 0$ —— " —— , dvs

at graden til $f(x) - 20$ er minst 4.

Da må også graden til $f(x)$ være minst 4.

(samme grad som $f(x) - 20$).