MET 1180, forelesning 11, 1. okt. 2024, Runar Ile

Plan 1. Kvadratiske funksjoner og parabler med oppg. 5a–e, 7a og 8b.
2. Inntekt, kostnad og overskudd (profitt) med oppg. 9.

1. Kvadratiske funksjoner og parabler

5a) Fordi vi har to klare nullpunkter er

$$f(x) = a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2) = a(x-2)(x-5)$$

null-punkter

likn.

For å finne a: $f(0) = 5$ dvs $a(0-2)(0-5) = 5$

$$a\cdot 10 = 5$$

$$a = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Altså $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-5)}}$

– kunne også brukt $f(7) = 5$ osv.

5b) Vi ser at $x = 2$ er et nullpunkt og at $x = -\frac{1}{2}$ er symmetrilinjen (fordi $f(-1) = 6 = f(0)$ og symmetrilinjen må ligge midt mellom -1 og 0)

Da må det andre nullpunktet være $-\frac{1}{2} - 2{,}5 = -3$. Altså er $f(x) = a(x-2)(x+3)$

For å finne a: ser at $f(0) = 6$, dvs

$$a\cdot(0-2)(0+3) = 6$$

$$a\cdot(-6) = 6$$

$$a = \frac{6}{-6} = -1$$

Så $\underline{\underline{f(x) = -(x-2)(x+3)}}$

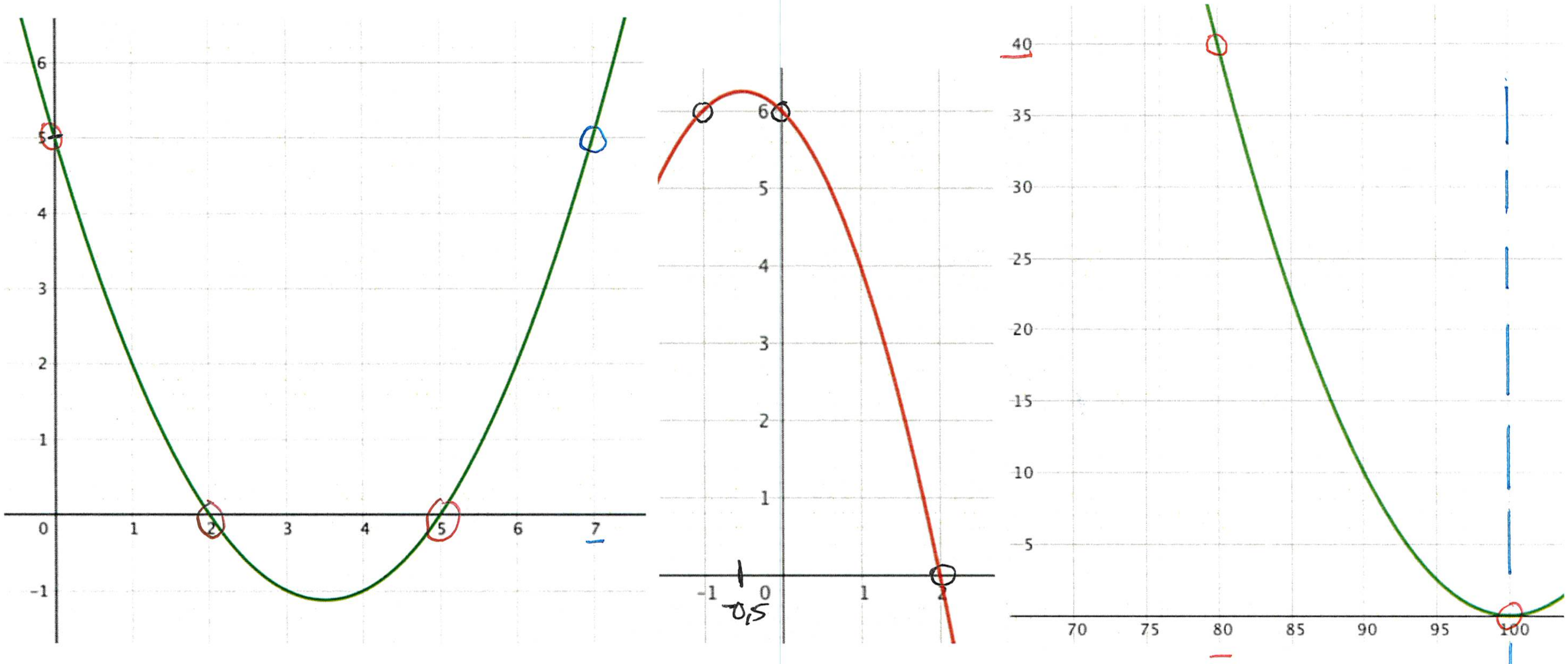


Figure 2: Parabolas (a-c)

5c) Vi ser at $x = 100$ er en dobbeltrot, så

$$f(x) = a\cdot(x-100)\cdot(x-100) = a(x-100)^2$$

Finner a: Fordi (80, 40) ligger på grafen

vil $f(80) = 40$, dvs $a\cdot(80-100)^2 \overset{\text{likn.}}{=} 40$

dvs $a\cdot(-20)^2 = 40$

$$a\cdot 400 = 40$$

$$a = \frac{40}{400} = \frac{10}{100}$$

$$a = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

så $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{10}(x-100)^2}}$

Dette er også std.formen

$f(x) = a(x-s)^2 + d$ med $\underline{\underline{a = \frac{1}{10}}}$, $\underline{\underline{s = 100}}$, $\underline{\underline{d = 0}}$

5d) Vi ser at $x = 1$ er symmetriaksen og maksverdien er $y = -1$

Da er $f(x) = a(x-1)^2 - 1$

Finner a: Fordi $(0, -2)$ ligger på grafen, får vi

$f(0) = -2$, dvs $a\cdot(0-1)^2 - 1 \overset{\text{likn.}}{=} -2$

$$a - 1 = -2$$

$$a = -2 + 1 = -1$$

Altså $\underline{\underline{f(x) = -(x-1)^2 - 1}}$

5e) Symmetriaksen er $x = -3$, minimumsverdien er $y = 4{,}25$ (midt mellom 4 og 4,5)

Da er $f(x) = a(x+3)^2 + 4{,}25$

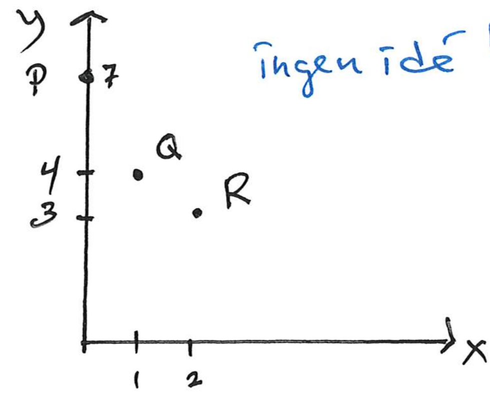
Finner a: Fordi $(-2, 4{,}5)$ ligger på grafen, er

$f(-2) = 4{,}5$ dvs $a(-2+3)^2 + 4{,}25 = 4{,}5$

$\underline{a = 0{,}25}$ og $\underline{\underline{f(x) = 0{,}25(x+3)^2 + 4{,}25}}$

7a) Tre punkter på grafen: $P = (0, 7)$, $Q = (1, 4)$, $R = (2, 3)$

Bare én god observasjon:
Grafen krysser y-aksen i 7.



Ingen idé!

Bruker formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

P: $f(0) = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 7$

$$\underline{c = 7}.$$

Q: $f(1) = 4$, dvs $a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 7 = 4$

så $\boxed{a + b = -3}$ (1)

R: $f(2) = 3$, dvs $a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 7 = 3$

så $\boxed{4a + 2b = -4}$ (2)

Løser dette likningssystemet

Fra (1) får vi $4a + 4b = -12$ (mult. (1) med 4)

trekker fra (2): $4a + 2b = -4$

$$0a + 2b = -8$$

så $\underline{b = -4}$

Fra (1): $a = -3 + 4 = \underline{1}$

Så $\underline{\underline{f(x) = x^2 - 4x + 7}}$

Start: 14.59

8b) $f(x) = 3x^2 + 36x + 110$. Hvordan fullføre kvadratet?

Merk at $3x^2 + 36x = 3(x^2 + 12x)$. Fullfører kvadratet

av $x^2 + 12x = (x+6)^2 - 36$ slik at

$$f(x) = 3\left[(x+6)^2 - 36\right] + 110 = 3(x+6)^2 - 108 + 110$$

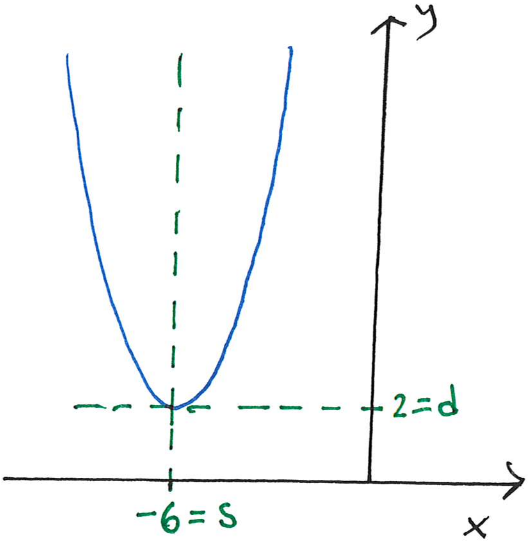
$$= \underline{\underline{3(x+6)^2 + 2}}$$

Da er $\underline{\underline{a = 3}}$, $\underline{\underline{s = -6}}$, $\underline{\underline{d = 2}}$

3

Sammendrag: Andregradsfunksjoner

3 standardformer



A) Hvis vi kjenner røttene:

$$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$$

B) Hvis vi kjenner symmetriaksen
$x = s$ og maks/min-verdien $y = d$

$$f(x) = a(x-s)^2 + d$$

C) Andre tilfeller: $f(x) = ax^2 + bx + c$
(men kan alltid bruke (B))

2. Inntekt, kostnad og overskudd (profitt).

x = antall produserte og solgte enheter

p = enhetspris, så inntektsfunksjonen $I(x) = p \cdot x$

Oppg 9 Bestem p slik at det blir positiv profitt
akkurat for $x > 300$.

a) Kostnadsfunksjon $K(x) = 2100 + 5x$
Profittfunksjon $P(x) = I(x) - K(x)$

$$= px - (2100 + 5x) = (p-5)x - 2100$$

Ulikheten $P(x) > 0$ skal ha løsningsmengde
$x > 300$ dvs $x \in \langle 300, \rightarrow \rangle$.

Løser derfor ulikheten $P(x) > 0$ dvs

$$(p-5)x - 2100 > 0 \quad | + 2100$$

$$(p-5)x > 2100 \quad | : (p-5)$$

To tilfeller:

$p-5 > 0$: Da $x > \frac{2100}{p-5}$

Vil at denne løsningsmengden er $x > 300$

dvs $\frac{2100}{p-5} = 300$, løser likn.

$$2100 = 300 \cdot (p-5)$$

så

$$2100 = 300p - 1500$$

$$300p = 3600 \quad | : 300$$

$$p = \frac{3600}{300} = \underline{\underline{12}}$$ (og $12-5>0$, så ok)

$p-5<0$ gir $x < \frac{2100}{p-5}$, men dette tallet $\frac{2100}{p-5}$ er negativt, og ant. prod. enheter er pos., så ingen løsninger.

b) Kostnadsfunksjonen er $K(x) = 4500 - 5x + 0{,}01x^2$ med $x \in [0, 1000]$. Da er

profittfunksjonen

$$P(x) = p \cdot x - (4500 - 5x + 0{,}01x^2)$$

løser opp og trekker sammen

$$= -0{,}01x^2 + (p+5)x - 4500$$

fullfører kvadratet

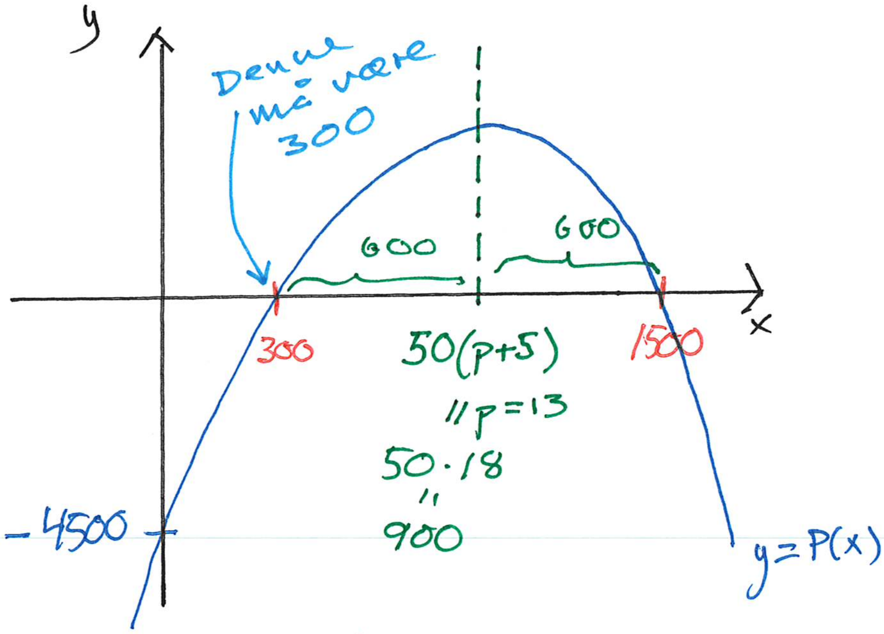
$$= -0{,}01\left(x^2 - 100(p+5)x\right) - 4500$$

$$\downarrow :2$$

$$= -0{,}01\left(\left[x - 50(p+5)\right]^2 - 50^2(p+5)^2\right) - 4500$$

kvadrerer

$$= \underbrace{-0{,}01}_{a}\left[x - \underbrace{50(p+5)}_{s}\right]^2 + \underbrace{25(p+5)^2 - 4500}_{d}$$



Vil finne tallet p som gjør at den minste roten til P(x) er 300.

Løser likningen

$$P(300) = 0$$

likn. for p

dvs $\underbrace{-0{,}01\cdot 300^2}_{-900} + (p+5)\cdot 300 - 4500 = 0$

$$(p+5)\cdot 300 = 4500 + 900 = 5400$$

$$p+5 = \frac{5400}{300} = 18$$

$$\underline{\underline{p = 13}}$$

NB: Positiv profitt for $x \in \langle 300, 1000]$ (se på grafen)