Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Bestem tangentlinjen til nivåkurven $f(x,y) = c$ i $(x,y) = (1,1)$:

a) $f(x,y) = 2x + 3y,\ c = 5$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ c = 2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2,\ c = 7$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2,\ c = 3$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3,\ c = -1$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x,\ c = 3$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3,\ c = 2$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ c = \sqrt{2}$

Oppgave 2.
Vi ser på funksjonen $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$.

a) Vis at nivåkurven $f(x,y) = c$ er en ellipse når $c > -1$, og bestem sentrum (x_0,y_0) for ellipsen og dens halvakser a og b. Bruk dette til å skissere nivåkurvene for $c = 0, 1, 2, 3$ i samme koordinatsystem.

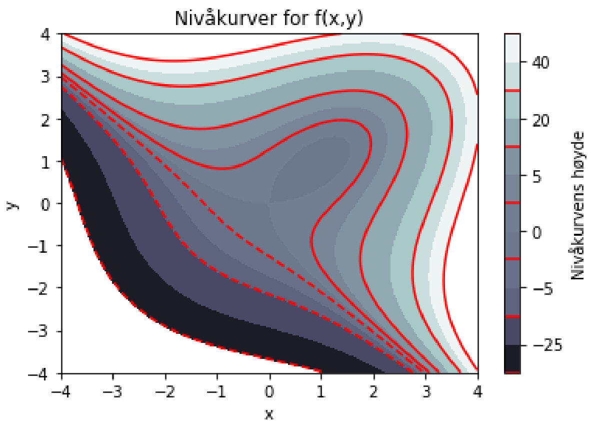
b) Finn tangentlinjene til nivåkurven gjennom $(x,y) = (1,1)$ og gjennom $(x,y) = (2,1/2)$, og tegn inn tangentene.

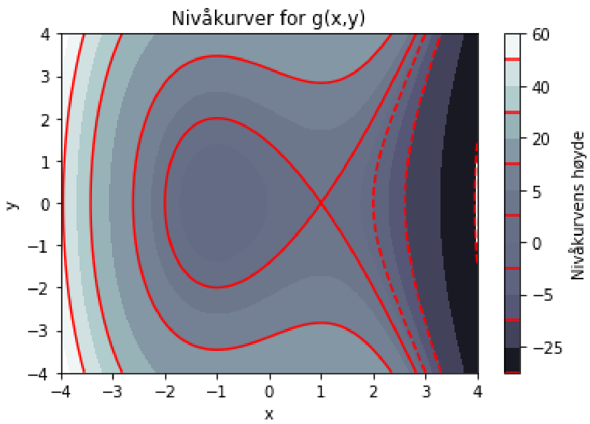
c) Finn $\nabla f(1,1)$ og $\nabla f(2,1/2)$, og tegn disse inn. Hva skjer med funksjonsverdiene langs gradienten?

d) Ser det ut som om funksjonen f har en minimums- eller maksimumsverdi? Forklar hvorfor/hvorfor ikke.

Oppgave 3.
Vi ser på nivåkurven $f(x,y) = c$ til funksjonen $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y$. Hva slags kurve er dette? Beskriv gradienten til f i et punkt på nivåkurven geometrisk.

Oppgave 4.
Nivåkurver for to funksjoner f og g i området $-4 \leq x,y \leq 4$ er vist i figurene nedenfor.





a) Finn eventuelle lokale maksimumspunkter, minimumspunkter og sadelpunkter på tegningen.

b) Funksjonene f og g er to av funksjonene fra Oppgave 1 (se også Oppgave 8-10 fra Oppgaveark 39). Hvilke?

Oppgave 5.
Finn gradienten $\nabla f(1,1)$ til f i punktet $(1,1)$, og bruk dette til å finne den retningsderiverte $f'_{\mathbf{a}}(1,1)$ til $f(x,y)$ i punktet $(1,1)$ langs vektoren $\mathbf{a} = (a_1,a_2)$:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 6.
Vis at gradienten $\nabla f(a,b)$ står normalt på tangentlinjen til nivåkurven $f(x,y) = c$ i punktet (a,b), og at f vokser om vi går et kort stykke langs gradienten.

Oppgave 7.
Finn globale maksimums- og minimumspunkter, hvis de finnes:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgaver fra læreboken

Læreboken [E]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans*
Oppgaveboken [O]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag*

Oppgaver:	[E] 7.4.3 - 7.4.4, 7.5.1 - 7.5.5
Fullstendig løsning:	Se [O] Kap 7.4 - 7.5

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
a) $y = -2x/3 + 5/3$
b) $y = -x + 2$
c) $y = -x/6 + 7/6$
d) $y = 1$
e) Ingen tangentlinje
f) $y = 1$
g) Ingen tangentlinje
h) $y = -x + 2$

Oppgave 2.
a) Ellipser med sentrum i $(1,0)$ med halvakser $a = \sqrt{c+1}$ og $b = \sqrt{c+1}/2$.
b) Tangentlinjene har likning $y = 1$ og $y = -x/2 + 3/2$.
c) $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \end{pmatrix}^T$, og $\nabla f(2,1/2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}^T$, og funksjonsverdiene øker når vi beveger oss langs gradienten.
d) Ingen maksimumsverdi (halvaksen blir større jo større c er). Minimumsverdi $f(1,0) = -1$.

Oppgave 3.
Kurven er en sirkel med sentrum i $(-2{,}1)$ og radius $\sqrt{c+5}$. Gradienten peker bort fra sirkelens sentrum.

Oppgave 4.

a) f har lokalt min. i $(1{,}1)$ og sadelpunkt i $(0{,}0)$, og g har lokalt min. i $(-1{,}0)$ og sadelpunkt i $(1{,}0)$

b) f er funksjonen i e) og g er funksjonen i f)

Oppgave 5.

a) $\nabla f(1{,}1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1{,}1) = 2a_1 + 3a_2$

b) $\nabla f(1{,}1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1{,}1) = 2a_1 + 2a_2$

c) $\nabla f(1{,}1) = \begin{pmatrix} 2 & 12 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1{,}1) = 2a_1 + 12a_2$

d) $\nabla f(1{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1{,}1) = 8a_2$

e) $\nabla f(1{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1{,}1) = 0$

f) $\nabla f(1{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1{,}1) = 2a_2$

g) $\nabla f(1{,}1) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T$, $f'_{\mathbf{a}}(1{,}1) = (a_1 + a_2)/\sqrt{2}$

Oppgave 7.

a) ingen globale maks./min.

b) $(0{,}0)$ er globalt min.

c) $(0{,}0)$ er globalt min.

d) $(1{,}0)$ er globalt min.

e) ingen globale maks./min.

f) ingen globale maks./min.

g) ingen globale maks./min.

h) $(0{,}0)$ er globalt min.