

Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

Finn A^{-1} , dersom det er mulig:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 2.

Bestem de verdiene av a som er slik at den inverse matrisen til A eksisterer, og regn ut A^{-1} i disse tilfellene:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 3.

Vi ser på det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

- Løs systemet når $t = 2$.
- Avgjør hvor mange løsninger systemet har for ulike verdier av t .
- Finn den inverse matrisen A^{-1} når den eksisterer, og bruk dette til å løse systemet i disse tilfellene.

Oppgave 4.

Skriv uttrykkene enklest mulig:

a) $(A + B)^2$

b) $(A^T A)^T$

c) $A(3B - C) + (A - 2B)C + 2B(C + 2A)$

d) $A^{-1}(BA)$

e) $(BAB^{-1})^2 \cdot B^2$

f) $(A - B)(C - A) + (C - B)(A - C) + (C - A)^2$

Oppgave 5.

Anta at A og B er 3×3 -matriser med $|A| = 2$ og $|B| = -5$. Regn ut:

a) $\det(AB)$

b) $\det(3A)$

c) $\det(-2B^T)$

d) $\det(2A^{-1}B)$

Oppgave 6.

Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ med parameter a , gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 2a & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 40 \\ 51 \end{pmatrix}$$

- Bruk Gauss-eliminering til å løse det lineære systemet når $a = 2$. Marker pivot-posisjonene.
- Regn ut $\det(A)$, og bestem alle verdier av a slik at $\det(A) = 0$.
- Finn A^{-1} når $a = 3$.
- Vis at $A^7 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har eksakt én løsning for $a = -1$, og uttrykk løsningen \mathbf{x} ved A og \mathbf{b} .

Oppgave 7.

Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 3 - a \end{pmatrix}$$

og a er en parameter.

- (6p) Løs det lineære systemet når $a = 1$.
- (6p) Finn determinanten $\det(A)$, og bestem verdiene av a slik at $\det(A) = 0$.
- (6p) Bestem alle verdier av a slik at $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.
- (6p) Regn ut $A^2 - 3A$ når $a = 1$.

Oppgaver fra læreboken

Læreboken [E]: Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans*

Oppgaveboken [O]: Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag*

Oppgaver: [E] 6.6.1 - 6.6.6

Fullstendig løsning: Se [O] Kap 6.6

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

c) A^{-1} ikke definert

d) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

f) A^{-1} ikke definert

Oppgave 2.

a) $A^{-1} = \frac{1}{1-a^2} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ for $a \neq -1, 1$

b) $A^{-1} = \frac{1}{6a} \begin{pmatrix} 2a & -2 & 1-a^2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}$ for $a \neq 0$

c) $A^{-1} = \frac{1}{(1-a)(1+3a)} \begin{pmatrix} 2 & a-1 & 1-3a \\ a-1 & 1-a^2 & a-1 \\ 1-3a & a-1 & 2 \end{pmatrix}$ for $a \neq -1/3, 1$

Oppgave 3.

a) $(x,y,z) = (2/3, 0, 2/3)$

b) Uendelig mange løsninger for $t = 0$ og $t = 1$, ingen løsninger for $t = -1$, og én løsning for $t \neq -1, 0, 1$

c) $A^{-1} = \frac{1}{t(t^2-1)} \begin{pmatrix} t^2 & 0 & -t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ -t & 0 & t^2 \end{pmatrix}$ for $t \neq -1, 0, 1$, løsningene er $(x,y,z) = \left(\frac{t}{t+1}, 0, \frac{t}{t+1}\right)$ for $t \neq -1, 0, 1$

Oppgave 4.

a) $A^2 + AB + BA + B^2$ b) $A^T A$ c) $3AB + 4BA$ d) $A^{-1}BA$ e) BA^2B f) 0

Oppgave 5.

a) -10 b) 54 c) 40 d) -20

Oppgave 6.

a) $(7 - 2y, y, 1)$ der y er fri

b) $-32a^2 + 140a - 152$, $a = 2$ eller $a = 19/8$

c) $\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -8 & 8 & -4 \\ 36 & 4 & -12 \\ -20 & -5 & 10 \end{pmatrix}$

d) $(A^{-1})^7 \cdot \mathbf{b}$

Oppgave 7.

a) $(x,y,z) = (2, 0, -1)$

b) $|A| = -a(2a + 3)$, og $|A| = 0$ for $a = 0$ og $a = -3/2$

c) $a = 0$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$