

MET1181 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2021
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 16

torsdag 25/11 kl 8-9.45.

Kap 4.9-10: Elastisitet. Linearisering. Taylorpolynomer.

[L] 4.9 3-4, 7-8

[L] 4.10 1-7

Flervalgseksamen 2018h oppg 10, 13

Flervalgseksamen 2019v oppg 11

Flervalgseksamen 2019h oppg 11

Oppgaver for veiledningstimen torsdag 25/11

i D1-065 (10-14), B2-045 (10-15.45) og B2-070 (14-17) eller på Zoom

Oppgave 1 La p være prisen på en vare og $D(p)$ etterspørselen (= antall solgte enheter). Bestem den relative prisendringen, den relative etterspørselsendringen og priselastisiteten. Avgjør om etterspørselen er elastisk, uelastisk eller nøytralelastisk.

a) $D(30) = 40$ og $D(30,5) = 39$

b) $D(20) = 101$ og $D(21) = 100,95$

c) $D(10) = 24,648$ og $D(10,01) = 24,623$

Oppgave 2 La p være prisen på en vare og $D(p)$ etterspørselen (= antall solgte enheter). Beregn den momentane priselastisiteten $\varepsilon(p) = El_p(D(p))$. Bestem prisen p slik at etterspørselen er elastisk, uelastisk og nøytralelastisk.

a) $D(p) = 100 - 2p$ med $0 < p < 50$

b) $D(p) = 100 + \frac{20}{p}$ med $p \geq 1$

c) $D(p) = 67e^{-0.1p}$ med $p > 0$

d) $D(p) = 100 + \frac{900}{p^2}$ med $p \geq 1$

e) $D(p) = 53e^{-0.02p^2}$ med $p > 0$

Oppgave 3

a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x), \dots, P_4(x)$ av grad 1 – 4 til funksjonen $f(x) = e^x$ ved 0.

b) Beregn $P_1(1), \dots, P_4(1)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(1) = e$.

Oppgave 4

a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x), \dots, P_4(x)$ av grad 1 – 4 til funksjonen $f(x) = \ln(x)$ ved 1.

b) Beregn $P_1(2), \dots, P_4(2)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(2) = \ln(2)$.

Oppgave 5 Vi har en funksjon $f(x)$ med $f(50) = 100$, $f'(50) = 1$ og $f''(50) = -0,4$.

a) Bestem Taylorpolynomet $P_2(x)$ til $f(x)$ ved 50.

b) Bruk $P_2(x)$ til å gi en tilnærmet verdi for $f(52)$.

Oppgave 6 La $P_1(x), \dots, P_4(x)$ være Taylorpolynomene i oppgave 3. Beregn grenseverdiene.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_1(x)}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_2(x)}{x^3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - P_3(x)}{x^4}$

Oppgave 7 La $P_1(x), \dots, P_4(x)$ være Taylorpolynomene i oppgave 4. Beregn grenseverdiene.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - P_1(x)}{(x-1)^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - P_2(x)}{(x-1)^3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - P_3(x)}{(x-1)^4}$$

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 12)

Vi betrakter priselastisiteten $\varepsilon = \varepsilon(p)$ for en vare med etterspørsel gitt ved $D(p) = 120 - 8p$. Da er:

- (A) $\varepsilon > -1$ for $p = 7,5$
- (B) $\varepsilon > -1$ for $p < 7,5$
- (C) $\varepsilon > -1$ for $p > 7,5$
- (D) $\varepsilon > -1$ for alle verdier av p
- (E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 12)

Etterspørsel etter en vare er gitt ved $D(p) = 110 - 5p$. Da er elastisiteten $\varepsilon(p) = -1$ for:

- (A) $p = 7$
- (B) $p = 11$
- (C) $p = \frac{16}{5}$
- (D) $p = 22$
- (E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 10 (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 3)

La p være prisen på en vare med etterspørselsfunksjon $D(p) = 100e^{-0,2p}$. Bestem hvilke priser p som gjør at etterspørselen er elastisk, uelastisk og nøytralelastisk.

Oppgave 11 (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 10)

Funksjonen $f(x)$ har $f(30) = 700$, $f'(30) = 5$ og $f''(30) = -1$. Beregn en tilnærmet verdi til $f(31)$.

Fasit

Oppgave 1

- a) relativ prisendring er $\frac{0,5}{30}$, relativ etterspørselsendring er $\frac{-1}{40}$ og priselastisiteten er $-1,5$, dvs elastisk
- b) relativ prisendring er $\frac{1}{20}$, relativ etterspørselsendring er $\frac{-0,05}{101}$ og priselastisiteten er $-0,0099$, dvs uelastisk
- c) relativ prisendring er $0,001$, relativ etterspørselsendring er $-0,001014$ og priselastisiteten er $-1,014$, dvs elastisk

Oppgave 2

- a) $\varepsilon(p) = \frac{-2p}{100-2p}$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 25$, uelastisk for $0 < p < 25$ og elastisk for $25 < p < 50$.
- b) $\varepsilon(p) = -\frac{1}{5p+1}$. Etterspørselsfunksjonen er uelastisk for alle $p \geq 1$.
- c) $\varepsilon(p) = -0,1p$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 10$, uelastisk for $0 < p < 10$ og elastisk for $p > 10$.
- d) $\varepsilon(p) = -\frac{18}{p^2+9}$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 3$, elastisk for $1 \leq p < 3$ og uelastisk for $p > 3$.
- e) $\varepsilon(p) = -0,04p^2$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 5$, uelastisk for $0 < p < 5$ og elastisk for $p > 5$.

Oppgave 3

- a) $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
- b) $P_1(1) = 2$, $P_2(1) = 2,5$, $P_3(1) = \frac{8}{3} \approx 2,67$, $P_4(1) = \frac{65}{24} \approx 2,71$. Avstanden fra $f(1) = e$ er (tilnærmet):

$$\begin{aligned} |f(1) - P_1(1)| &= |e - 2| = 0,72 \\ |f(1) - P_2(1)| &= |e - 2,5| = 0,22 \\ |f(1) - P_3(1)| &= |e - \frac{8}{3}| = 0,052 \\ |f(1) - P_4(1)| &= |e - \frac{65}{24}| = 0,0099 \end{aligned}$$

Oppgave 4

- a) $P_1(x) = (x - 1)$, $P_2(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2}$, $P_3(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$,
 $P_4(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$
- b) $P_1(2) = 1$, $P_2(2) = \frac{1}{2}$, $P_3(2) = \frac{5}{6} \approx 0,83$, $P_4(2) = \frac{7}{12} \approx 0,58$. Avstanden fra $f(2) = \ln(2)$ er (tilnærmet):

$$\begin{aligned} |f(2) - P_1(2)| &= |\ln(2) - 1| = 0,31 \\ |f(2) - P_2(2)| &= |\ln(2) - \frac{1}{2}| = 0,19 \\ |f(2) - P_3(2)| &= |\ln(2) - \frac{5}{6}| = 0,14 \\ |f(2) - P_4(2)| &= |\ln(2) - \frac{7}{12}| = 0,11 \end{aligned}$$

Oppgave 5

- a) $P_2(x) = 100 + (x - 50) - 0,2(x - 50)^2$
- b) $f(52) \approx P_2(52) = 101,2$

Oppgave 6

- a) Dette er et $\frac{0}{0}$ -uttrykk. Kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Deriverer teller og nevner. Får et nytt $\frac{0}{0}$ -uttrykk og bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x^2} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \quad \left(= \frac{f''(0)}{2} \right)$$

- b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^3} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{3x^2} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6} \quad \left(= \frac{f'''(0)}{3!} \right)$$

c) $\frac{1}{24} \left(= \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \right)$

Oppgave 7

a) Dette er et $\frac{0}{0}$ -uttrykk. Kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Deriverer teller og nevner. Får et nytt $\frac{0}{0}$ -uttrykk og bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - (x - 1)}{(x - 1)^2} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x - 1)} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2} \left(= \frac{f''(1)}{2} \right)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - [(x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2}]}{(x - 1)^3} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - [1 - (x - 1)]}{3(x - 1)^2} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2} + 1}{6(x - 1)} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x^3}}{6} = \frac{1}{3} \left(= \frac{f'''(1)}{3!} \right)$$

c) $-\frac{1}{4} \left(= \frac{f^{(4)}(1)}{4!} \right)$

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 12)

B

Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 12)

B

Oppgave 10 (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 3)

$$\varepsilon(p) = -0,2p$$

Etterspørselen er *elastisk* for $p > 5$.

Etterspørselen er *uelastisk* for $0 < p < 5$.

Etterspørselen er *nøytralelastisk* for $p = 5$.

Oppgave 11 (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 10)

Taylorpolynomet av andre grad til $f(x)$ i 30 er $P_2(x) = 700 + 5(x - 30) - 0,5(x - 30)^2$. Dermed er $f(31) \approx P_2(31) = 704,5$.