

*I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.*

R. Lucas

**Forelesning 14**  
torsdag 11/11 kl 8-9.45.

**Kap 4.5, 4.7: Implisitt derivasjon. Den annenderiverte og konvekse/konkave funksjoner.**

[L] 4.5 1-3  
[L] 4.7 1-11

Flervalgseksamen 2016v oppg 15  
Flervalgseksamen 2016h oppg 11  
Flervalgseksamen 2017v oppg 11

**Oppgaver for veiledningstimen torsdag 11/11**  
i D1-065 (10-12.45), B2-045 (10-15.45) og B2-070 (13-16.45) eller på Zoom

**Oppgave 1** Uttrykk  $y'$  ved hjelp av  $y$  og  $x$  ved implisitt derivasjon. Finn alle løsninger for  $y$  gitt at  $x = a$  og bestem funksjonsuttrykkene for tangentene i disse punktene.

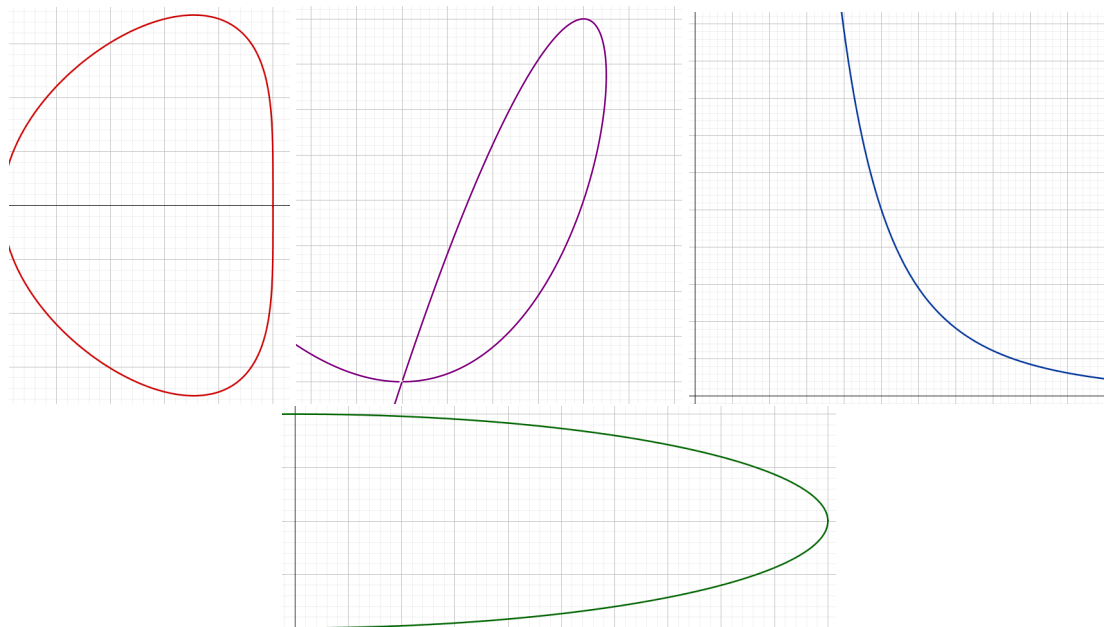
a)  $x^2 + 25y^2 - 50y = 0$  og  $a = 4$

b)  $x^{3,27}y^{1,09} = 1$  og  $a = 1$

c)  $x^4 - x^2 + y^4 = 0$  og  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d)  $x^3 - 3xy + y^2 = 0$  og  $a = 2$

**Oppgave 2** I figur 1 ser du grafene til de implisitt definerte kurvene i oppgave 1. Finn kurvene og likningene som hører sammen. Tegn også inn tangentene fra oppgave 1.



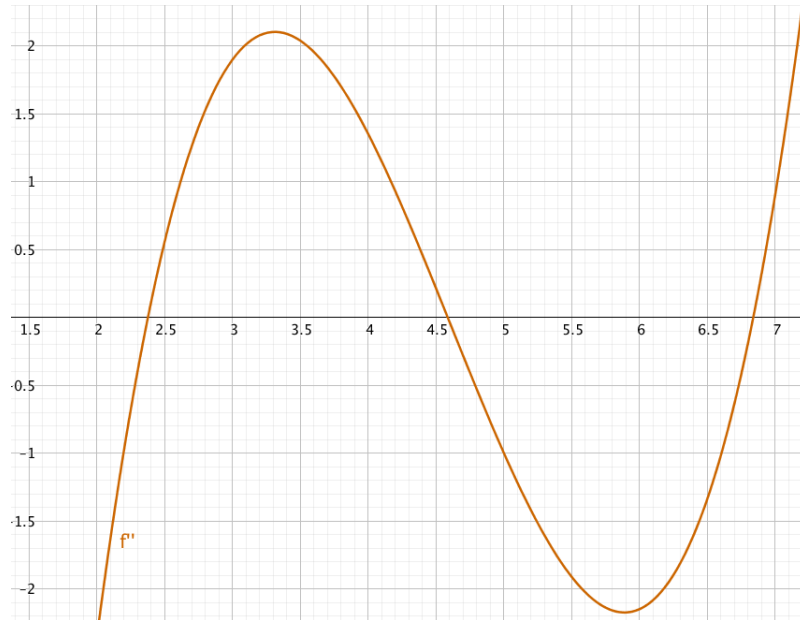
Figur 1: Fire implisitt definerte kurver

**Oppgave 3** Tegn en grov skisse av grafene til **to** forskjellige funksjoner  $f(x)$  med de oppgitte dataene. En av de to funksjonene skal være *strengt voksende*. NB: Du skal ikke finne noe funksjonsuttrykk!

a)  $f''(x)$  er negativ for  $x < 5$  og positiv for  $x > 5$

b)  $f''(x)$  er positiv for  $x < 10$ , negativ for  $10 < x < 15$  og positiv for  $x > 15$

**Oppgave 4** I figur 2 ser du grafen til  $f''(x)$ . Avgjør hvilke utsagn som er sanne.



Figur 2: Grafen til  $f''(x)$

a)  $f''(2,5) > f''(4)$

b)  $f(x)$  er konveks for  $3 \leq x \leq 4$

c)  $f(x)$  har ingen vendepunkt mellom 5,5 og 6

d)  $f(x)$  har to vendepunkter for  $2 \leq x \leq 7$

e)  $f(x)$  er konkav for  $6 \leq x \leq 6,5$

f)  $f'(4)$  er maksimum til  $f'(x)$  for  $x \in [3, 4]$

g)  $f'(x)$  avtar i intervallet  $[4, 5]$

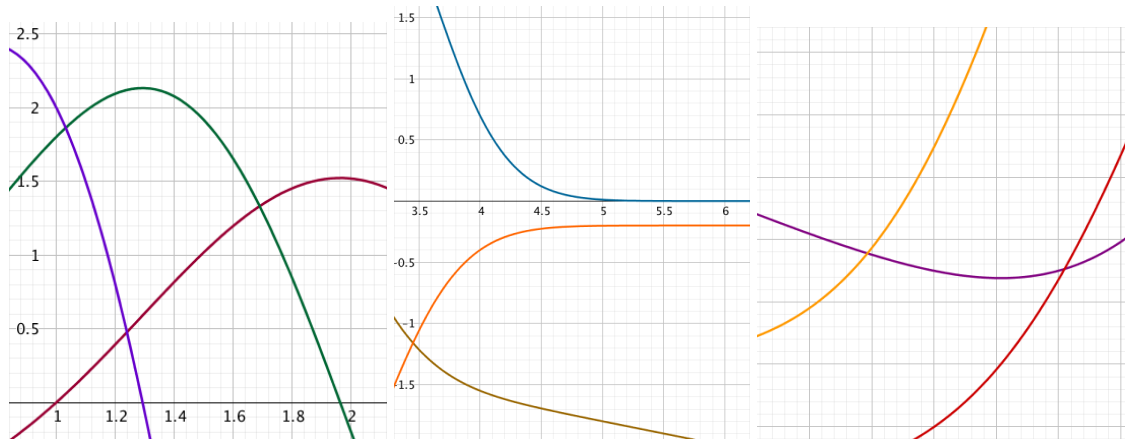
h)  $f'(x)$  vokser raskere rundt  $x = 2,5$  enn rundt  $x = 3$

i)  $f(4)$  må være positiv

j)  $f'(2,5) < f'(4,5)$

k)  $f(x)$  må ha minst ett lokalt minimumspunkt

**Oppgave 5** I figur 3 ser du grafene til  $f(x)$ ,  $f'(x)$  og  $f''(x)$  i samme koordinatsystem. Avgjør hvilken som er grafen til  $f(x)$ , til  $f'(x)$  og til  $f''(x)$  i (a-c).



Figur 3: (a-c): Grafene til  $f(x)$ ,  $f'(x)$  og til  $f''(x)$

**Oppgave 6** Beregn  $f'(x)$  og  $f''(x)$ , løs likningen  $f''(x) = 0$ , avgjør hvor  $f(x)$  er konveks og konkav, og finn eventuelle vendepunkter.

a)  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 1$     b)  $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) - \frac{x}{4} + 1$

c)  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x + 1$     d)  $f(x) = x^5 - 10x^4 + 30x^3 + 2$

**Oppgave 7** Finn funksjonsuttrykkene for vendetangentene i oppgave 6.

**Oppgave 8** Bestem (lokale) minimumspunkter og maksimumspunkter for funksjonen  $f(x)$ . Forklar hvorfor disse punktene gir minimum/maksimum til  $f(x)$  ved å bruke konveksitet/konkavitet av funksjonen. Beregn minimum/maksimum til funksjonen.

a)  $f(x) = \ln(-x^2 + 14x - 45)$  med  $D_f = \langle 5, 9 \rangle$

b)  $f(x) = \frac{-1}{x(x-6)}$  med  $D_f = \langle 0, 6 \rangle$

c)  $f(x) = e^{x(x-4)}$  med  $D_f = \mathbb{R}$  (alle reelle tall)

**Oppgave 9** Beregn uttrykket for den deriverte funksjonen til  $f(x)$ .

a)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 13}$     b)  $f(x) = xe^{0,1x^2}$     c)  $f(x) = (2x + 5)^{100}$

d)  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

**Oppgave 10** (Flervalgseksamen 2018v, oppg 11)

Vi betrakter funksjonen gitt ved  $f(x) = 4\sqrt{x} \ln(x)$ . Hvilket utsagn er sant?

- (A) Funksjonen  $f$  har ett vendepunkt
- (B) Funksjonen  $f$  har flere vendepunkter
- (C) Funksjonen  $f$  er konkav
- (D) Funksjonen  $f$  er konveks
- (E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

### Fasit

**Oppgave 1**

a)  $y' = \frac{-x}{25(y-1)}$ , for  $x = 4$  er  $y = \frac{2}{5}$  eller  $y = \frac{8}{5}$  som gir tangentene  $h_1(x) = \frac{4}{15}x - \frac{2}{3}$  og  $h_2(x) = -\frac{4}{15}x + \frac{8}{3}$

b)  $y' = \frac{-3y}{x}$ , for  $x = 1$  er  $y = 1$  som gir tangenten  $h(x) = -3x + 4$

c)  $y' = \frac{x(1-2x^2)}{2y^3}$ , for  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  er  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  som gir tangentene  $h_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  og  $h_2(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d)  $y' = \frac{3(y-x^2)}{2y-3x}$ , for  $x = 2$  er  $y = 4$  eller  $y = 2$  som gir tangentene  $h_1(x) = 4$  og  $h_2(x) = 3x - 4$

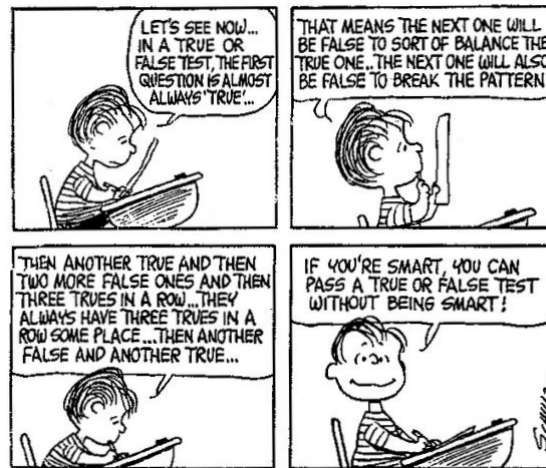
**Oppgave 2**

- a) Grønn                      b) Blå                      c) Rød                      d) Purpur

**Oppgave 3**

Sammenlign med andre studenter, spør veilederne!

**Oppgave 4**



Figur 4: True or false, or opposite

**Oppgave 5**

- |  |  |                                       |
|--|--|---------------------------------------|
| a) $f(x)$ : Mørk rød,<br>$f'(x)$ : Grønn | b) $f(x)$ : Oliven,<br>$f'(x)$ : Oransje | c) $f(x)$ : Fiolett,<br>$f'(x)$ : Rød |
|--|--|---------------------------------------|

**Oppgave 6**

- a)  $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$  og  $f''(x) = 12(x-1)(x-3)$ .  $f''(x) = 0$  har løsninger  $x = 1$  og  $x = 3$ .  $f(x)$  er konveks i intervallet  $(-\infty, 1]$ ,  $f(x)$  er konkav i intervallet  $[1, 3]$ , og  $f(x)$  er konveks i intervallet  $[3, \infty)$ . Dermed er  $x = 1$  og  $x = 3$  vendepunkter.
- b)  $f'(x) = \frac{2x-2}{(x-1)^2+1} - \frac{1}{4}$  og  $f''(x) = \frac{-2x(x-2)}{[(x-1)^2+1]^2}$ .  $f''(x) = 0$  har løsninger  $x = 0$  og  $x = 2$ .  $f(x)$  er konkav i intervallet  $(-\infty, 0]$ ,  $f(x)$  er konveks i intervallet  $[0, 2]$ , og  $f(x)$  er konkav i intervallet  $[2, \infty)$ . Dermed er  $x = 0$  og  $x = 2$  vendepunkter.
- c)  $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} + 1$  og  $f''(x) = (x+1)(x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $f''(x) = 0$  har løsninger  $x = \pm 1$ ,  $f(x)$  er konveks i intervallet  $(-\infty, -1]$ ,  $f(x)$  er konkav i intervallet  $[-1, 1]$ , og  $f(x)$  er konveks i intervallet  $[1, \infty)$ . Dermed er  $x = -1$  og  $x = 1$  vendepunkter.
- d)  $f'(x) = 5x^4 - 40x^3 + 90x^2$  og  $f''(x) = 20x(x-3)^2$ .  $f''(x) = 0$  har løsninger  $x = 0$  og  $x = 3$  (dobbelrot).  $f(x)$  er konkav i intervallet  $(-\infty, 0]$  og  $f(x)$  er konveks i intervallet  $[0, \infty)$ . Dermed er  $x = 0$  eneste vendepunkt.

**Oppgave 7**

- a) Vendetangenter:  $h_1(x) = 16x - 4$  og  $h_3(x) = 28$
- b) Vendetangenter:  $h_0(x) = -1,25x + \ln(2) + 1$  og  $h_2(x) = 0,75x + \ln(2) - 1$
- c) Vendetangenter:  $h_{-1}(x) = (1 + e^{-0,5})x + 2e^{-0,5} + 1$  og  $h_1(x) = (1 - e^{-0,5})x + 2e^{-0,5} + 1$
- d) Vendetangent:  $h_0(x) = 2$

**Oppgave 8**

- a)  $f'(x) = \frac{2(7-x)}{-x^2+14x-45}$  som skifter fortegn fra + til - ved  $x = 7$ .  $f''(x) = \frac{-2[(x-7)^2+4]}{(-x^2+14x-45)^2}$  er negativ for alle  $x$ , så  $f(x)$  er konkav, maks:  $f(7) = 2\ln(2) = 1,39$
- b)  $f'(x) = \frac{2x-6}{x^2(x-6)^2}$  som skifter fortegn fra - til + ved  $x = 3$ .  $f''(x) = \frac{-6[(x-3)^2+3]}{x^3(x-6)^3}$  er positiv for alle  $x \in (0, 6)$ , så  $f(x)$  er konveks, min:  $f(3) = \frac{1}{9} = 0,11$
- c)  $f'(x) = 2(x-2)e^{x(x-4)}$  som skifter fortegn fra - til + ved  $x = 2$ .  $f''(x) = 4[(x-2)^2 + \frac{1}{2}]e^{x(x-4)}$  er positiv for alle  $x$ , så  $f(x)$  er konveks, min:  $f(2) = e^{-4} = 0,02$

**Oppgave 9**

- |   |   |
|---|---|
| a) $f'(x) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+13}}$ | b) $f'(x) = \frac{1}{5}(x^2+5)e^{0,1x^2}$ |
| c) $f'(x) = 200(2x+5)^{99}$                 | d) $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$         |

**Oppgave 10 A**