MET1181, 9. forelesning, 12. okt. 2021, Runar Ile

Plan 1. Rasjonale funksjoner og asymptoter. (kap. 3.9)
2. Hyperbler (kap. 3.9)
3. Kontinuitet og skjæringssetningen (kap. 3.10)

1. Rasjonale funksjoner og asymptoter

Rasjonal funksjon $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ polynomer

Eks $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3}$

Vil finne horisontal asymptote. Deler på x^2 i teller og nevner.

$$f(x) = \frac{\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{0}{1} = 0$$

$$f(1000) = \frac{\frac{2}{1000} + \frac{1}{1000^2}}{1 + \frac{3}{1000^2}} = 0{,}00200099\ldots$$

Dette betyr at linjen $y = 0$ (x fri) er en horisontal asymptote for $f(x)$.

Eks $f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x-5)}$ $(x \neq 1,\ x \neq 5)$

Hvis $x \to 1^-$ „x nærmer seg 1 nedenfra"

$x = 0{,}9$ $x = 0{,}99$ $x = 0{,}999$

Da vil

$x - 1 \longrightarrow 0^-$ „x nærmer seg 0 nedenfra"

$x - 5 \longrightarrow -4^-$

$2x+1 \longrightarrow 3^-$

medfører at $f(x) = \frac{\overset{\to 3^-}{2x+1}}{\underbrace{(x-1)}_{0^-}\underbrace{(x-5)}_{-4^-}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$

Hvis $x \to 1^+$ „x nærmer seg 1 ovenifra"

$x = 1,1$ $x = 1,01$ $x = 1,001$

Da vil

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \longrightarrow 0^+ \\ x-5 \longrightarrow -4^+ \\ 2x+1 \longrightarrow 3^+ \end{array}\right\} \text{medfører at } f(x) = \frac{\overset{\to 3}{2x+1}}{\underbrace{(x-1)}_{0^+}\underbrace{(x-5)}_{-4}} \xrightarrow[x \to 1^+]{} -\infty$$

Konklusjon: Linjen $x = 1$ (y fri) er en vertikal asymptote for $f(x)$.

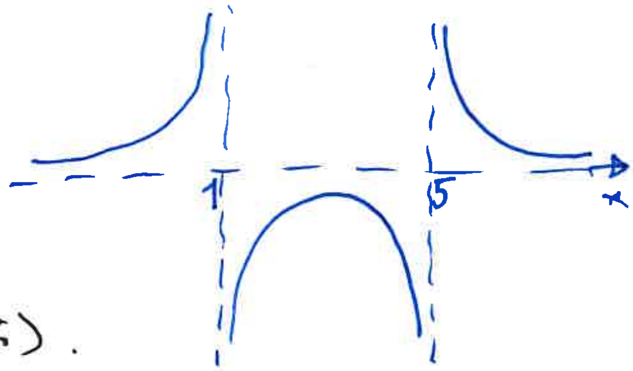
Tilsvarende

Hvis $x \to 5^+$

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \longrightarrow 4^+ \\ x-5 \longrightarrow 0^+ \\ 2x+1 \longrightarrow 11^+ \end{array}\right\} \text{medfører at } f(x) \xrightarrow[x \to 5^+]{} +\infty$$

og $f(x) \xrightarrow[x \to 5^-]{} -\infty$

Altså er linjen $x = 5$ (y fri) en vertikal asymptote for $f(x)$



$f(x)$ har også en horisontal asymptote $y = 0$ (x fri).

Skrå asymptoter

Eks $f(x) = x-5 + \dfrac{2}{x-4}$ har vertikal asymptote $x = 4$

Setter $g(x) = x-5$

Da er $y = g(x)$ (grafen $g(x)$) en skrå asymptote for $f(x)$ fordi

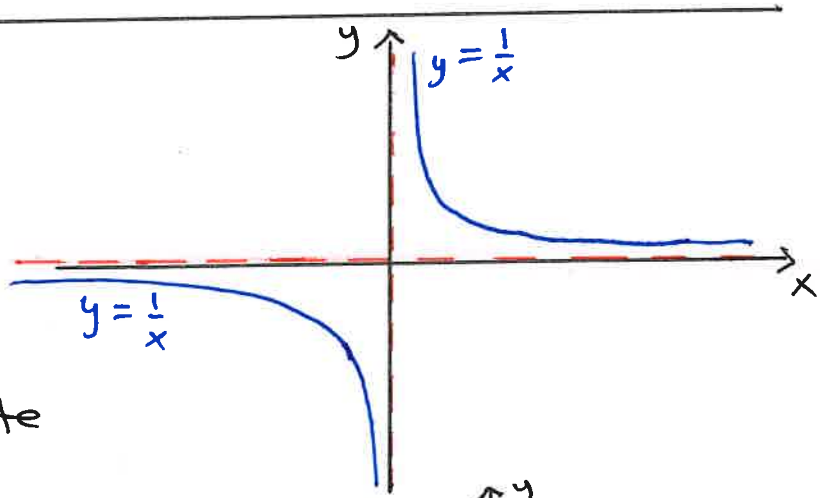
$$f(x) - g(x) = \frac{2}{x-4} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

NB $f(x) = \dfrac{(x-5)(x-4)+2}{(x-4)} = \dfrac{x^2-9x+22}{x-4}$

- bruker polynomdivisjon for å få formen $x-5+\dfrac{2}{x-4}$

---

2. Hyperbler

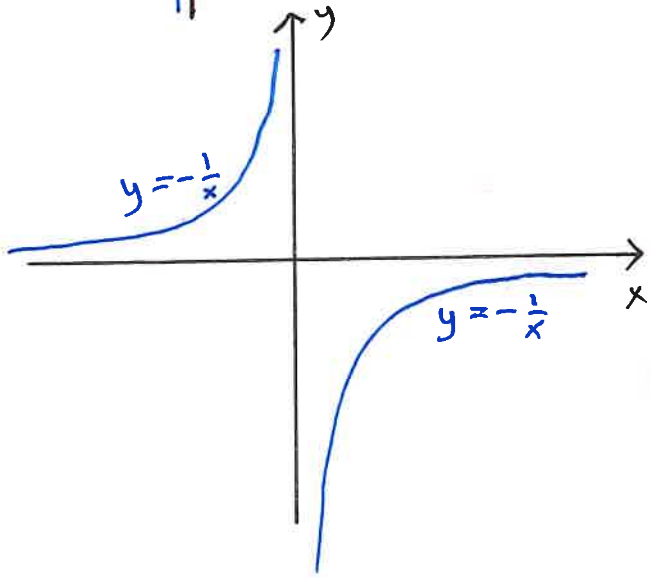


Eks $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

Linjen $x=0$ er vertikal asymptote

Linjen $y=0$ er horisontal asymptote

Eks $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$



Definisjon En funksjon $f(x)$ er en hyperbelfunksjon hvis den kan skrives på formen

$$f(x) = c + \frac{a}{x-b} \qquad (a \neq 0)$$

Eks $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$ er en hyperbelfunksjon fordi polynomdivisjon gir

$$(3x-5) : (x-2) = 3 + \frac{1}{x-2}$$

$$\begin{array}{l} -(3x-6) \\ \hline \qquad\quad 1 \end{array}$$

$\cdot\,(x-2)$

så $a = 1$
$b = 2$
$c = 3$

så $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2}$

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^-]{} -\infty$$

og $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^+]{} +\infty$

så linjen $x = 2$ er en vertikal asymptote

Dessuten $f(x) = 3 + \underbrace{\dfrac{1}{x-2}}_{\to 0} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 3$

så linjen $y = 3$ er en horisontal asymptote

Start: 9.05

$f(1) = 3 + \frac{1}{1-2} = 2$

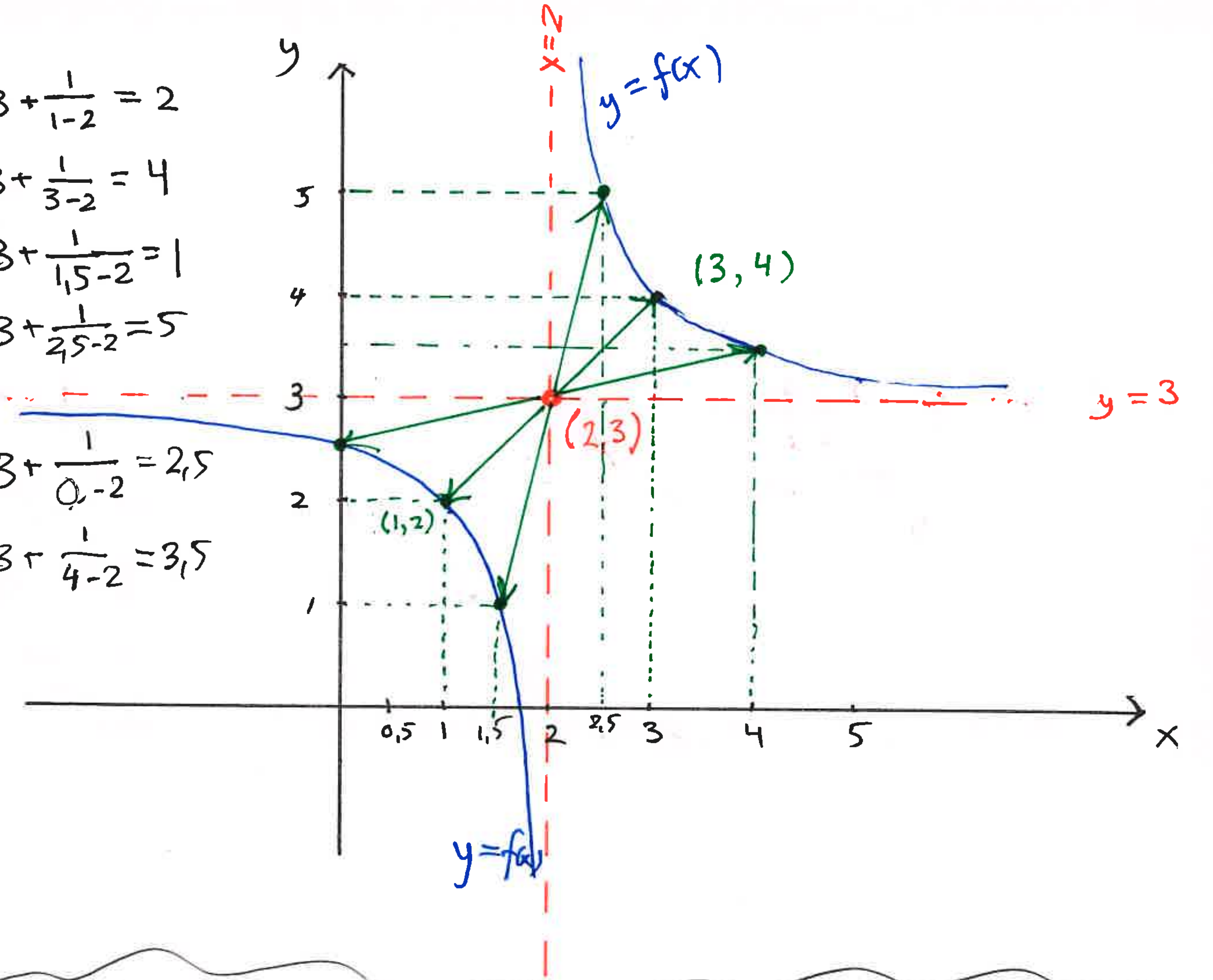
$f(3) = 3 + \frac{1}{3-2} = 4$

$f(1{,}5) = 3 + \frac{1}{1{,}5-2} = 1$

$f(2{,}5) = 3 + \frac{1}{2{,}5-2} = 5$

$f(0) = 3 + \frac{1}{0-2} = 2{,}5$

$f(4) = 3 + \frac{1}{4-2} = 3{,}5$



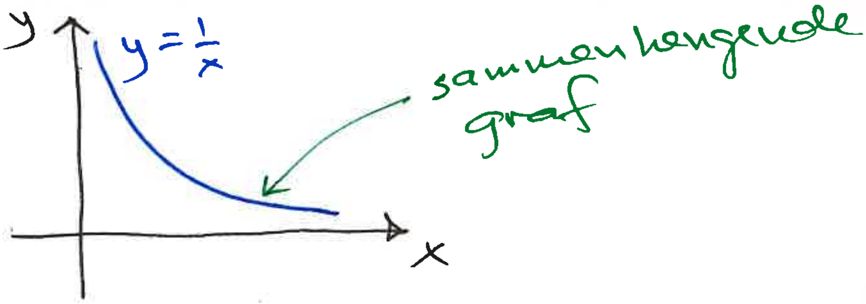
Grafen er symmetrisk om skjæringspunktet til asymptotene!

3. Kontinuitet og skjæringssetningen

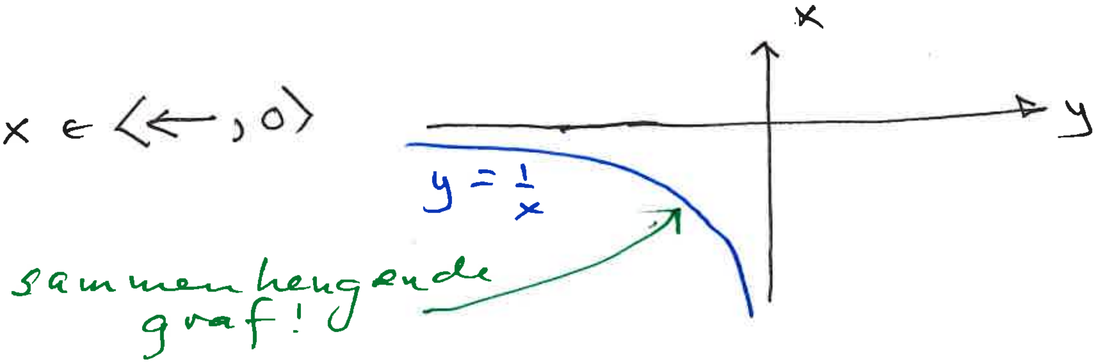
En funksjon er kontinuerlig hvis grafen er sammenhengende for hvert intervall i definisjonsområdet

Eks $f(x) = \frac{1}{x}$ er definert for $x \neq 0$ dvs for $x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$

For $x \in \langle 0, \rightarrow \rangle$



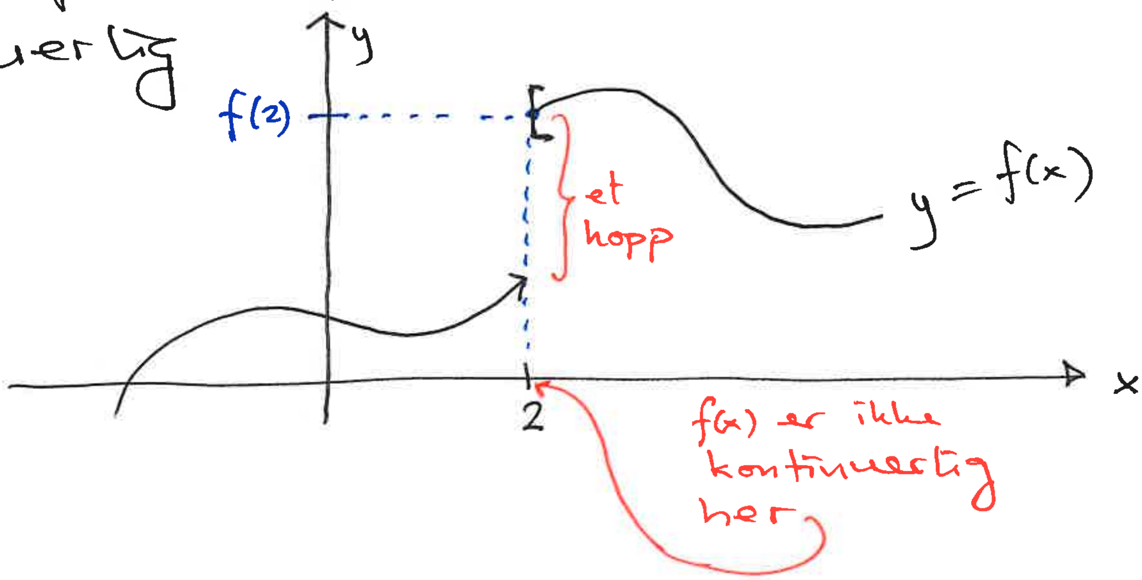
For $x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle$



Altså er $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinuerlig.

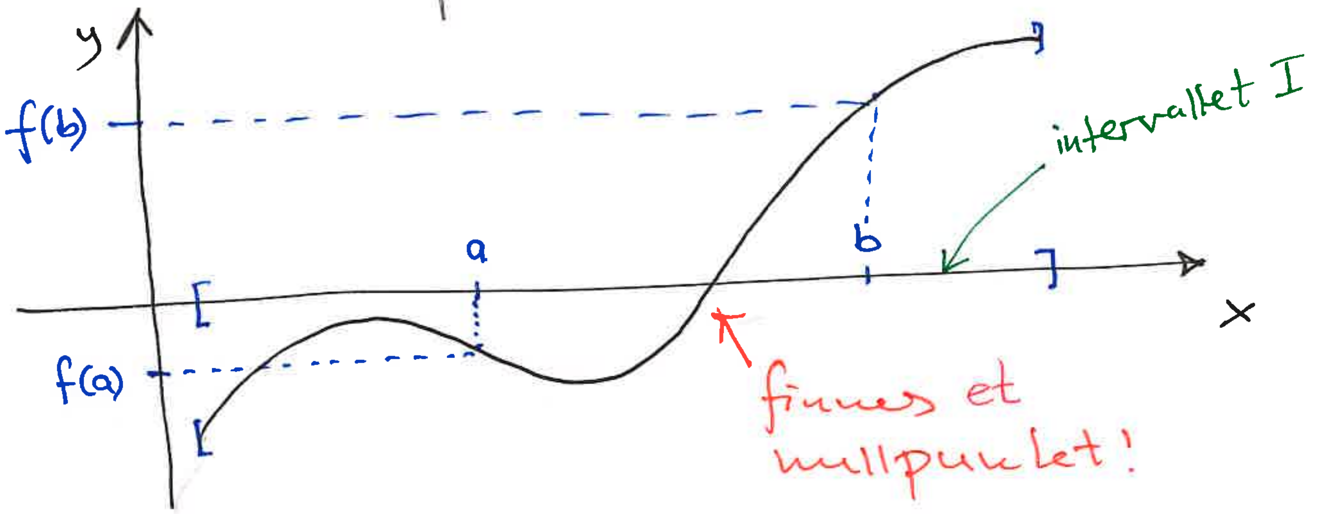
Alle „vanlige" funksjoner er kontinuerlige.

Hvis grafen til $f(x)$ „hopper" er $f(x)$ ikke kontinuerlig



Skjæringssetningen

Hvis $f(x)$ er kontinuerlig i et intervall I og a og b ligger i I med $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$ så finnes det et nullpunkt for $f(x)$ mellom a og b



Faktisk vil $f(x)$ oppnå alle y-verdier mellom $f(a)$ og $f(b)$ for x mellom a og b

Eks $f(x) = x \cdot \sqrt{2x+5} - \frac{10}{x}$ har et nullpunkt mellom $x = 1$ og $x = 10$ fordi

- $f(1) = 1 \cdot \sqrt{2 \cdot 1 + 5} - \frac{10}{1} = \sqrt{7} - 10 < 0$
- $f(10) = 10 \cdot \sqrt{2 \cdot 10 + 5} - \frac{10}{10} = 10 \cdot 5 - 1 > 0$
- $f(x)$ er kontinuerlig for $x > 0$.
  („vanlig" funksjon definert for alle $x > 0$)

Da gir skjæringssetningen at det finnes et nullpunkt mellom 1 og 10.