MET1181, 6. forelesning, 23. sept. 2021, Runar Ile

Plan
1. Polynomdivisjon og faktorisering
2. Rasjonale og irrasjonale likninger
3. Ulikheter

1. Polynomdivisjon og faktorisering

Vil dividere et polynom $f(x)$ med et annet polynom $g(x)$ og få et polynom $q(x)$ med rest $r(x)$

$$g(x)\cdot \Big|\quad \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \text{med } \operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(g(x))$$

får $f(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x)$

Eks $f(x) = 3x^2+2x+1$ og $g(x) = x-2$

$$\begin{array}{l}
(\boxed{3x^2}+2x+1):(\boxed{x}-2) = \overset{3x^2:x}{3x} + \overset{8x:x}{8} + \dfrac{17}{(x-2)} \\
-\,(3x^2-6x\quad) \xleftarrow{\cdot(x-2)} \\
\hline
\qquad \boxed{8x}+1 \\
\quad -\,(8x-16) \xleftarrow{\cdot(x-2)} \\
\hline
\qquad\quad \boxed{17}
\end{array}$$

– kalles for resten

Så $q(x) = 3x+8$ og $r(x) = 17$.

Sjekk $\left(3x+8+\frac{17}{x-2}\right)\cdot(x-2)$

$$=(3x+8)(x-2)+\frac{17}{\cancel{x-2}}\cdot\cancel{(x-2)}$$

$$=3x^2-6x+8x-16+17=3x^2+2x+1=f(x)$$

– så ok!

To anvendelser av polynomdivisjon

A) Å finne asymptoter til rasjonale funksjoner

Eks $$\frac{3x^2+2x+1}{x-2}=3x+8+\frac{17}{x-2}$$

har en vertikal asymptote: linjen $x=2$

og en skrå asymptote: linjen $y=3x+8$

B) Å faktorisere et polynom som et produkt av lineære (grad 1) polynomer

Eks Faktorisér $x^3-4x^2-11x+30$ i lineære faktorer

Løsning Tre steg.

Steg I Vi gjetter på en heltallsløsning (rot)

Jeg prøver $x=-3$: $(-3)^3-4\cdot(-3)^2-11\cdot(-3)+30$

$$=-27-36+33+30=0$$

Altså vil $(x-(-3))=x+3$ være en faktor!

Steg II Bruker polynomdivisjon til å finne $f(x) : (x+3)$.

$$(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) : (x+3) \overset{\text{ved polynomdiv.}}{=} x^2 - 7x + 10$$

hjemme lekse!

Dette betyr at

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x+3) \cdot (x^2 - 7x + 10)$$

Steg III Vi finner røttene til $x^2 - 7x + 10$

De er $\underline{x = 2}$ og $\underline{x = 5}$

så $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$

Konklusjon $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = \underline{\underline{(x+3)(x-2)(x-5)}}$

Merk 1 Heltallsroten må dele 30.

Merk 2 Det går ikke alltid å faktorisere

Eks $x^2 + 5$ har ikke røtter

$x^2 + 2x + 3$ —— " —— fordi $b^2 - 4ac$
$= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 < 0$

Merk 3 Det kan være vanskelig (umulig) å gjette på en rot!

Start : 9.00

2. Rasjonale og irrasjonale likninger

En rasjonal likning $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$

$p(x)$ og $q(x)$ er polynomer

Eks $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)} = 0$

Da $x+1 = 0$ og $(x-1)(x+3) \neq 0$ dvs $x \neq 1$, $x \neq -3$ og $\underline{x = -1}$ er da eneste løsning

Eks Oppg. 10a fra forrige uke

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{99} = 0$$

$$\frac{x^{100} - 1}{x - 1} = 0 \qquad (*)$$

dvs $x^{100} - 1 = 0$ og $x - 1 \neq 0$

dvs $x^{100} = 1$ og $x \neq 1$

dvs $x = \pm\sqrt[100]{1} = \pm 1$ og $x \neq 1$

så $\underline{x = -1}$ er eneste løsning på $(*)$

Må sjekke $x = 1$ separat:

$$1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^{99} = 100 \neq 0$$

så $\underline{x = -1}$ også eneste løsning på den første likningen.

Eks $\quad \dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)} = 2 \qquad x \neq 1,\ x \neq -3$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} - 2 = 0 \qquad -\text{''}-$$

setter på felles brøk

$$\frac{(x+1) - 2\cdot(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 0 \qquad -\text{''}-$$

løser opp og trekker sammen

$$\frac{x+1-2(x^2+3x-x-3)}{(x-1)(x+3)} = 0 \qquad -\text{''}-$$

$$\frac{-2x^2-3x+7}{(x-1)(x+3)} = 0 \qquad -\text{''}-$$

som du kan løse!

Irrasjonale likninger

– den ukjente står under roten!

Eks $\quad 2\cdot\sqrt{x+1} = x-2$

kvadrerer begge sider

$$4\cdot(x+1) = (x-2)^2 = x^2-4x+4$$

$$4x+\cancel{4} = x^2-4x+\cancel{4}$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x-8) = 0$$

$\underline{x=0}$ el. $\underline{x=8}$

- trenger ikke være løsninger på den opprinnelige likningen

Vi må teste kandidatene:

$\underline{x=0}$ v.s $2\cdot\sqrt{0+1} = 2\cdot\sqrt{1} = 2$
h.s. $0-2 = -2$
ikke like, $x=0$ er ikke en løsning.

$\underline{x=8}$ v.s. $2\cdot\sqrt{8+1} = 2\cdot\sqrt{9} = 6$
h.s. $8-2 = 6$
er like, så $\underline{\underline{x=8}}$ er eneste løsning.

---

3. Ulikheter

$-2 < -1$ leses: „minus to er mindre enn minus en"

$\frac{1}{9} > \frac{1}{12}$ leses: „en nidel er større enn en tolvdel"

også $\leq$ og $\geq$

En ulikhet er en påstand om at ett uttrykk er mindre enn / større enn ... enn et annet uttrykk (tall).

Eks $x - 1 \geq 2$

- er sant hvis $x = 5$ fordi $5 - 1 \geq 2$
- er usant hvis $x = 2$ fordi $2 - 1 \geq 2$ ikke er sant

Løsningene på en ulikhet er de x-verdiene som gjør ulikheten sann!

I eks. er løsningene $\underline{\underline{x \geq 3}}$

Kan også skrive løsningene slik:

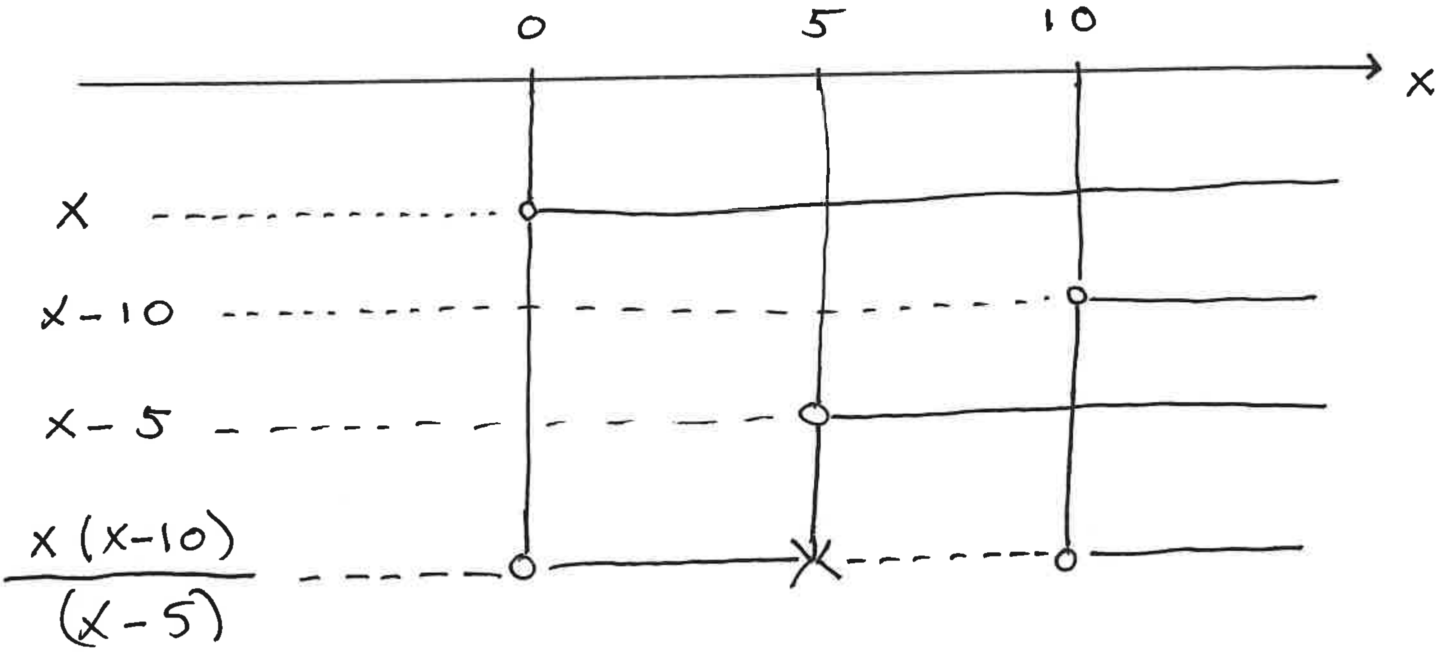
$$\underline{\underline{x \in [3, \infty\rangle}}$$

også slik: $\underline{\underline{x \in [3, \rightarrow\rangle}}$

Eks Løs ulikheten $\dfrac{x(x-10)}{(x-5)} \geq 0$

Løsning Fordi vi har 0 på h.s. og én ferdig faktorisert brøk på v.s. kan vi bruke fortegnsskjema.

Nullpunkter: $\underline{x = 0}$, $x - 10 = 0$ dvs $\underline{x = 10}$, $x - 5 = 0$ dvs $\underline{x = 5}$.



dvs $\underline{\underline{0 \le x < 5 \quad \text{eller} \quad x \ge 10}}$

alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in [0, 5\rangle \text{ eller } x \in [10, \infty\rangle}}$