MET 1181, 5. forelesning, 16. sept. 2021, Runar Ile

Plan
1. Lineære og kvadratiske likninger
2. Likninger med parametre: abc-formelen
3. Fullføre kvadratet
4. Likninger med gitt løsninger

1. Lineære og kvadratiske likninger

Et lineært uttrykk $ax + b$ (a og b er tall, $a \neq 0$)

Eks $4x - 3$ $(a = 4,\ b = -3)$

En lineær likning En likning som kan gjøres om til en ekvivalent likning: $\underbrace{ax + b = 0}_{\text{standardform til en lineær likn.}}$ $(a \neq 0)$

Eks Likningen $\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{2}{x+4}$ $\Big| \cdot (x+3)\cdot(x+4)$
mult. med fellesnevner

gir $x + 4 = 2(x+3)$

distributiv lov
gir $x + 4 = 2x + 6$

trekker fra $2x + 6$ på begge sider

$$\underline{-x - 2 = 0} \qquad (a = -1,\ b = -2)$$

$(x \neq -3,\ x \neq -4)$

Et kvadratisk uttrykk $ax^2 + bx + c$
hvor a, b, c er tall og $a \neq 0$

En kvadratisk likning En likning som kan gjøres om til en ekvivalent likning $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Eks Likningen $3x + 9 = (x-1)(x+3)$

– løser opp parantesen

$$3x + 9 = x^2 + 3x - x - 3$$

– trekker $3x - 9$ fra begge sider

$$0 = x^2 - x - 12$$

– akkurat det samme som

$$x^2 - x - 12 = 0 \qquad (a=1,\ b=-1,\ c=-12)$$

Eks Likningen $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = 3 \quad \Big| \cdot x \cdot (x+1)$

$$x+1 + 2x = 3x(x+1)$$

løser opp: $3x + 1 = 3x^2 + 3x$

trekker sammen: $3x^2 - 1 = 0 \qquad (a=3,\ b=0,\ c=-1)$

$$(x \neq 0,\ x \neq -1)$$

---

2. Likninger med parametre : abc – formelen

Hvis $a \neq 0$ gir abc-formelen løsningene til alle kvadratiske likninger på std. formen

$ax^2 + bx + c = 0$, nemlig

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eks $3x^2+4x-5=0$ $(a=3,\ b=4,\ c=-5)$

abc-formelen gir løsningene

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot3\cdot(-5)}}{2\cdot3}$$

$$=\frac{-\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}\cdot3}\pm\frac{\sqrt{16+60}}{6}=-\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{76}}{6}$$

$$=-\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{4\cdot19}}{6}=-\frac{2}{3}\pm\frac{\cancel{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{19}}{\cancel{6}^{3}}$$

$$=-\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{19}}{3}$$

Tre tilfeller:

$b^2-4ac>0$ gir to løsninger

$b^2-4ac=0$ gir en løsning

$b^2-4ac<0$ gir ingen løsninger

Oppgave Bestem antall løsninger.

a) $x^2+5x+6=0$ $5^2-4\cdot1\cdot6=1>0$: to løsninger

b) $-x^2+2x-1=0$ $2^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=0$: en løsning

c) $4x^2-5x-5=0$ $(-5)^2-4\cdot4\cdot(-5)>0$: to løsninger

NB: $-5^2=(-1)\cdot5^2$

$(-5)^2=(-5)\cdot(-5)$.

Start: 9.00

abc-formelen er ofte ikke så effektiv:

Eks Likningen $-3x^2+7=0$ $(a=-3,\ b=0,\ c=7)$

$$-3x^2=-7 \quad | : (-3)$$

$$x^2=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}$$

$$|x|=\sqrt{x^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

dvs $x=\sqrt{\frac{7}{3}}$ eller $x=-\sqrt{\frac{7}{3}}$

Eks Likningen $2x^2-6x=0$ $(a=2,\ b=-6,\ c=0)$

$$2(x^2-3x)=0 \quad | : 2$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

Dvs, enten $\underline{\underline{x=0}}$ eller $x-3=0$

$$\underline{\underline{x=3}}$$

Mønster Hvis $a\cdot b=0$

så er enten $a=0$ eller $b=0$

(eller begge lik 0)

3. Fullføre kvadratet

Eks Likningen $\underbrace{x^2+6x}-16 = 0$

Påstand: $x^2+6x = (x+3)^2 - 9$

- fordi $(x+3)^2 = x^2+2\cdot 3\cdot x + 3^2$

$= x^2+6x+9$

dvs $(x+3)^2 - 9 = x^2+6x$

$6:2 \qquad (\frac{6}{2})^2$

Får ny likning: $\underbrace{(x+3)^2-9}-16 = 0$

dvs $(x+3)^2 = 25$

dvs enten $x+3=5$ eller $x+3=-5$

$\underline{\underline{x=2}}$ eller $\underline{\underline{x=-8}}$

Oppgave Løs de kvadratiske likningene ved å fullføre kvadratet.

a) $x^2 - 8x - 33 = 0$

b) $x^2+2x = 63$

Løsning

a) $\frac{-8}{2} = -4$, så $x^2-8x = (x-4)^2-(-4)^2$

gir ny likning $(x-4)^2 - 16 - 33 = 0$

dvs $(x-4)^2 = 49$

dvs $x-4 = 7$ eller $x-4=-7$

dvs $\underline{\underline{x=11}}$ eller $\underline{\underline{x=-3}}$

b) $x^2+2x = (x+1)^2 - 1^2$

Så ny likning blir $(x+1)^2 - 1 = 63$

dvs $(x+1)^2 = 64$

dvs enten $x+1 = 8$ eller $x+1 = -8$

dvs $\underline{\underline{x = 7}}$ eller $\underline{\underline{x = -9}}$

---

4. Likninger med gitte løsninger

Hvis r_1 og r_2 er løsninger („røtter") til en kvadratisk likning $x^2+bx+c=0$

så er $(x-r_1)(x-r_2) = x^2 - r_2x - r_1x + (-r_1)(-r_2)$

$$= x^2 - (r_1+r_2)x + r_1r_2$$

$$= x^2 + bx + c$$

Så $b = -(r_1+r_2)$ og $c = r_1 \cdot r_2$

<u>Eks</u> $x^2+6x-16 = (x-2)\cdot(x+8)$

<u>Eks</u> Hvis $x^2+bx+c=0$ har røtter 1 og 2

er $(x-1)(x-2) = x^2 \underbrace{-3}_{=b}x + \underbrace{2}_{=c}$

<u>Eks</u> $3(x-1)(x-2) = 3x^2-9x+6$