MET 1181, 4. forelesning, 9. sept. 2021, Runar Ile

Plan: 1. Regulære kontantstrømmer
2. Uendelige rekker og grenseverdier
3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

1. Regulære kontantstrømmer

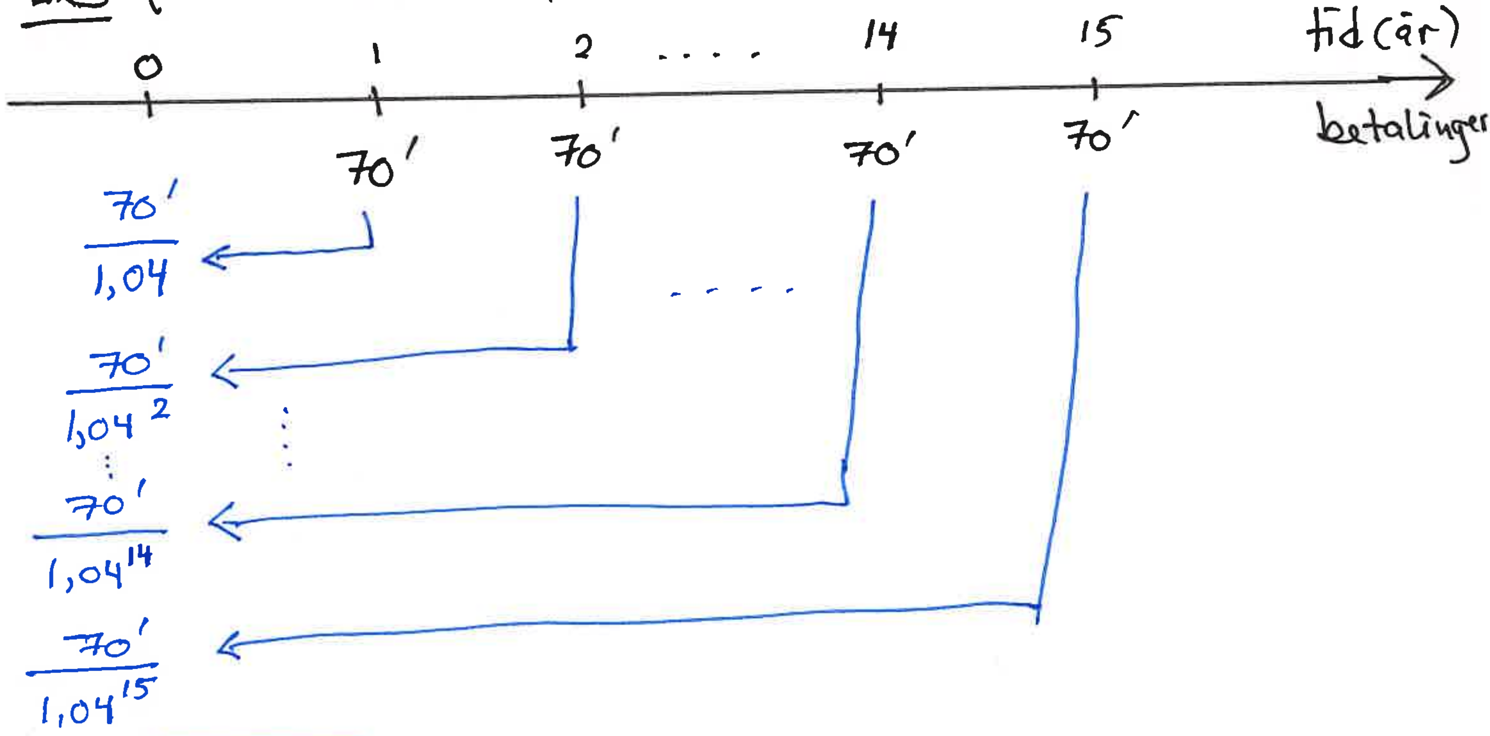
Et fast beløp betales hver termin

Eks Annuitetslån (nåverdien av kontantstrømmen = lånebeløpet)

Eks Sparing med et fast beløp hver termin
Fremtidsverdi el. sluttverdi: Det du har spart opp med renter.

– begge gir geometriske rekker.

Eks (annuitetslån, 4% rente)



Summen er nåverdien til den regulære kontantstrømmen.

Vi får en geometrisk rekke:

$$\frac{70'}{1{,}04} + \frac{70'}{1{,}04^2} + \dots + \frac{70'}{1{,}04^{14}} + \frac{70'}{1{,}04^{15}}$$

Leser den baklengs:

$$a_1 = \frac{70'}{1{,}04^{15}}, \quad k = 1{,}04, \quad n = 15$$

Nåverdien til kontantstrømmen (= det vi får låne)

er $$a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} = \frac{70'}{1{,}04^{15}} \cdot \frac{(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04} = \underline{\underline{778'}}$$

Vi kan også lese rekken forlengs:

$$\frac{70'}{1{,}04} \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{15} - 1\right)}{\left(\frac{1}{1{,}04} - 1\right)} = \underline{\underline{778'}}$$

---

2. Uendelige rekker og grenseverdier

Eks Annuitet: 70'

rente: 4 %

Ant. terminer: n

Første betaling: 1 år fra nå

Lånebeløpet (nåverdien) blir da (se neste side)

$$\frac{70'}{1,04^n}\cdot\frac{1,04^n-1}{0,04} = \frac{70'\cdot(1,04^n-1)}{1,04^n\cdot 0,04}$$

$$= \frac{70'\cdot(1,04^n-1) : 1,04^n}{\cancel{1,04^n}\cdot 0,04 : \cancel{1,04^n}} = \frac{70'\cdot\left(1-\frac{1}{1,04^n}\right)}{0,04}$$

nærmer seg 0 når n blir større og større ($n \to \infty$)

Så hele brøken nærmer seg $\frac{70'}{0,04} = \underline{\underline{1750'}}$

<u>Konklusjon</u> Hvis du betaler banken 70 000 hvert år for all fremtid, kan banken låne deg 1,75 mill til 4 % rente.

3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning.

<u>Eks</u> Du setter inn 1000 på en konto med 12% nominelle rente. Pengene står i ett år.

Forrentning	Balanse etter ett år
Årlig	$1000\cdot 1,12 = 1120,00$
Halvårlig	$1000\cdot 1,06^2 = 1123,60$
Kvartalsvis	$1000\cdot 1,03^4 = 1125,51$
Månedlig	$1000\cdot 1,01^{12} = 1126,83$
Daglig	$1000\cdot\left(1+\frac{12\%}{365}\right)^{365} = 1127,47$
Mønsteret:	$1000\cdot\left(1+\frac{0,12}{n}\right)^n$

Eulers tall : $e = 2{,}718282\ldots$

1 $\boxed{e^x}$!!

Beregner $1000 \cdot e^{0{,}12} = 1127{,}50$

1000 $\boxed{\times}$ 0,12 $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$

Start: 9.00

Eulers tall er <u>definert</u> som grenseverdien til $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ når n blir større og større

Skriver $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

Etter 1 år med 12 % nominell rente og <u>kontinuerlig forrentning</u> har innskuddet på 1000 har vokst til

$$1000 \cdot e^{0{,}12} = 1127{,}50$$

den årlig vekstfaktoren med kontinuerlig forrentning og 12 % nominell rente

---

<u>Eks</u> $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}71692\ldots$

$\left(1+\frac{1}{1\text{ mill}}\right)^{1\text{ mill}} = 2{,}71828\ldots$

Tilbake til eksempelet med 12 % :

$$\left(1+\frac{0{,}12}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{0{,}12}\right)}\right)^n$$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{0{,}12}\right)}\right)^{\frac{n}{0{,}12}}}_{\text{nærmer seg } e \text{ når } n\to\infty}\Bigg]^{0{,}12} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{0{,}12}$$

Så $1000 \cdot \left(1+\frac{0{,}12}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1000 \cdot e^{0{,}12}$

$= 1127{,}50$

balansen etter ett år med kont. forrentning

Den effektive renten er

$e^{0{,}12} - 1 = 12{,}7497\,\%$

Oppgave Du setter 10 mill. på en konto med 2,8 % (nominell) rente. Beregn balansen etter 5 år.

a) Med årlig forrentning

b) Med kontinuerlig forrentning

c) Bestem den effektive renten med kontinuerlig forrentning.

Løsning

a) Vekstfaktor for ett år : 1,028

Balanse etter 5 år : $10 \text{ mill.} \cdot 1{,}028^5$

$= \underline{\underline{11{,}48 \text{ mill.}}}$

b) Vekstfaktor for ett år : $e^{0{,}028} = 1{,}0284$

Balanse etter 5 år : $10 \text{ mill.} \cdot (e^{0{,}028})^5$

$= 10 \text{ mill} \cdot e^{0{,}028 \cdot 5}$

$= 10 \text{ mill} \cdot e^{0{,}140}$

$= \underline{\underline{11{,}50 \text{ mill.}}}$

c) Den effektive renten er

$e^{0{,}028} - 1 = 1{,}0284 - 1 = \underline{\underline{2{,}84\,\%}}$