Plan

1 Repetisjon av pensum i kurset
2 Eksamen 06/2021 Oppgave 1-7

(1) Eksamen: Mandag 09-14 penn/papir
- BI kalkulator
- utlevert formelark

Pensum: Tema:
- integrasjon
- matriser og vektorer, lin. system
- funksjoner i to variabler

Struktur: 16 spm (max 6p per spm.)
Skala: 40% for å få E
90% -"- A → justeres noe med

Nyttige oppgaver å se på før eksamen:
- eksamen 06/2021
- fagoppgaven fra mars
- oppgavesett 26-32

Formelark

Finansmatematikk

Geometriske rekker.
En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} = a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier.
Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal.
Arealet til området begrenset av $a \leq x \leq b$ og $f(x) \leq y \leq g(x)$ er

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x$$

Lineær algebra

Cramers regel.
Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

Funksjoner i to variabler

Andrederivert-testen.
Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum når $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$

b) lokalt maksimum når $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$

c) sadelpunkt når $AC - B^2 < 0$

der $H(f)(x^*, y^*) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B & C \end{smallmatrix}\right)$.

Nivåkurver.
Nivåkurven $f(x,y) = c$ har derivert $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Lagranges multiplikatormetode.
Lagrange-betingelsene for problemet

$$\max / \min f(x,y) \text{ når } g(x,y) = a$$

er gitt ved

$$\mathcal{L}'_x = 0, \; \mathcal{L}'_y = 0, \; g(x,y) = a$$

Et tillatt punkt har degenerert bibetingelse hvis

$$g'_x = 0, \; g'_y = 0$$

② Eksamen 06/2021

1. $f(x) = 2\sqrt{x}\,\ln x - 4\sqrt{x} = \underline{2x^{1/2}}\cdot\underline{\ln x} - \underline{4\cdot x^{1/2}}$

a) $f'(x) = \left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x^{-1/2}\right)\cdot \ln x + 2x^{1/2}\cdot\frac{1}{x} - 4\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}$

$$= \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{x}}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{x}}} = \frac{c\ln x + d}{\sqrt{x}}$$

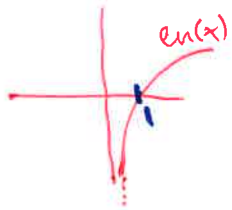
$$= \underline{\underline{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}}$$

$c = 1$
$d = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \underset{\downarrow\,\infty}{2\sqrt{x}}\,(\underset{\downarrow\,\infty}{\ln x} - 2) = \underline{\underline{\infty}}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\ln x - \underset{\downarrow 0}{4\sqrt{x}}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} \underset{\downarrow 0}{2\sqrt{x}}\,\underset{\downarrow -\infty}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{x^{-1/2}} \begin{matrix}\to -\infty\\ \to \infty\end{matrix}$

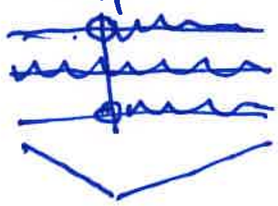


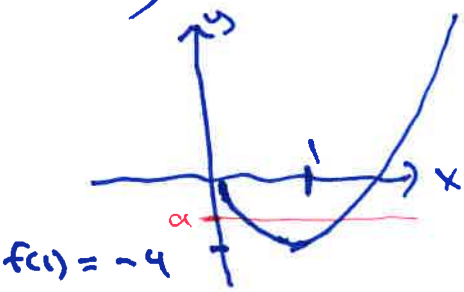
$\overset{\text{L'Hop.}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0^+} -4x^{-1-(-3/2)}$

$= \lim_{x\to 0^+} -4\sqrt{x} = \underline{\underline{0}}$

c) Bestem antall løsn. av $f(x) = a$ for alle a.

i) $f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$





Konklusjon:

$-4 < a < 0$: to løsn.

$a \geq 0, -4$: én løsn.

$a < -4$: ingen løsn.

2.

a) $\int \frac{3-7x}{9-x^2}\,dx = \int \frac{-3}{3-x} + \frac{4}{3+x}\,dx$

$\frac{3-7x}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} \quad | \cdot (3-x)(3+x)$ $\quad A=-3,\ B=4$

$3-7x = A\cdot(3+x) + B(3-x)$

$\underline{x=3}$: $-18 = A\cdot 6$ $\quad A=-3$

$\underline{x=-3}$: $24 = B\cdot 6$ $\quad \underline{B=4}$

$= \frac{-3}{-1}\ln|3-x| + \frac{4}{1}\ln|3+x| + C$

$= \underline{\underline{3\ln|3-x| + 4\ln|3+x| + C}}$

b) $\int 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx = \int 15x\sqrt{u}\,du$

$\boxed{\begin{array}{c} u=x+1 \\ du=1\cdot dx \end{array}} \rightarrow x=u-1$

$= \int 15(u-1)\sqrt{u}\,du = \int 15u^{3/2} - 15u^{1/2}\,du$

$n=3/2 \qquad n=1/2$

$= \frac{15\cdot 2}{5}u^{5/2} - \frac{15\cdot 2}{3}u^{3/2} + C$

$= 6u^2\sqrt{u} - 10u\sqrt{u} + C = \underline{\underline{6(x+1)^2\sqrt{x+1} - 10(x+1)\sqrt{x+1} + C}}$

e) $\int \frac{3\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int \frac{3\sqrt{u}}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\,du = \int 3\sqrt{u}\,du$

$3u^{1/2}$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \ln x \\ du &= \tfrac{1}{x}\cdot dx \end{aligned}}$$

$= \cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} u^{3/2} + C = 2u\sqrt{u} + C$

$= \underline{\underline{2 \ln x \sqrt{\ln x} + C}}$

3. a) Ser fra figuren at $f'(x)$ har:

vertikal asymptote: $\underline{x = 1.25 = 5/4}$

horisontal — " — : $\underline{y = 1}$

$f'(x) = \underbrace{c + \frac{d}{x-e}}_{\text{hyperbel}} = 1 + \frac{d}{x - 5/4}$

Finner d ved å lese av et punkt: $(1,3)$

$3 = 1 + \frac{d}{1 - 5/4}$

$2 = \frac{d \cdot 4}{-1/4 \cdot 4} = \frac{4d}{-1}$

$\frac{-4d}{-4} = \frac{2}{-4}$

$\underline{d = -1/2}$

Konklusjon:

$f'(x) = \underline{\underline{1 + \frac{-1/2 \cdot 4}{x - 5/4 \cdot 4}}}$

$= \underline{\underline{1 - \frac{2}{4x - 5}}}$

b) Bruker: $\boxed{f(3)-f(2) = \int_2^3 f'(x)\,dx}$ siden $f(x)$ er en antiderivert til $f'(x)$

fra figur: $\int_2^3 f'(x)\,dx$ = arealet av området under grafen til $f'(x)$ i $2 \leq x \leq 3$

$\simeq 8$ ruter $= 8 \cdot (1/4)^2 = \frac{8}{16} = \underline{\underline{0.5}}$

c) $f'(x) = 1 + \dfrac{-1/2}{x - 5/4}$

$f(x) = \int 1 + \frac{-1/2}{x-5/4}\,dx = x - \frac{1}{2}\ln|x - 5/4| + C$

$$f(3) - f(2) = \int_2^3 f'(x)\,dx$$

$$= \left(3 - \tfrac{1}{2}\ln|3 - 5/4| + \cancel{C}\right)$$

$$- \left(2 - \tfrac{1}{2}\ln|2 - 5/4| + \cancel{C}\right)$$

$$= \underline{1 - \tfrac{1}{2}\ln(7/4) + \tfrac{1}{2}\ln(3/4)}$$

$$\left(= 1 - \tfrac{1}{2}\left[\ln(7) - \ln(4)\right] + \tfrac{1}{2}\left[\ln(3) - \ln(4)\right] \right.$$

$$\left. = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\ln(7) - \ln(3)\right) \right)$$

$$\simeq 0.576$$

Stemmer bra med svaret i b)

4.

a) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 11 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3(12-11) - 4(42-55) + 5(7-10)$$
$$= 3\cdot 1 - 4\cdot(-13) + 5\cdot(-3) = 3+52-15 = \underline{\underline{40}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{Adj}(A) = \frac{1}{|A|}\cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 1 & 13 & -3 \\ -19 & -7 & 17 \\ 34 & 2 & -22 \end{pmatrix}^T = \underline{\underline{\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 1 & -19 & 34 \\ 13 & -7 & 2 \\ -3 & 17 & -22 \end{pmatrix}}}$$

b) $$A\cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ -20 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Alt 1: Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 24 \\ 7 & 2 & 11 & -20 \\ 5 & 1 & 6 & -6 \end{array}\right) \quad +1 \quad -1$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 38 \\ 7 & 2 & 11 & -20 \\ 5 & 1 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\vdots$$

Alt 2:

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad | \; A^{-1}\cdot$$

$$\underline{x} = A^{-1}\cdot \underline{b}$$

$$= \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 1 & -19 & 34 \\ 13 & -7 & 2 \\ -3 & 17 & 22 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -20 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 24+380-204 \\ 13\cdot 24+7\cdot 20-12 \\ -3\cdot 24-17\cdot 20-22\cdot 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}}}$$

c) $A\underline{x} = \underline{b}$

$\uparrow$

$x+y+z=9$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & r \\ 7 & 2 & 11 & s \\ 5 & 1 & 6 & t \end{array}\right) \begin{array}{l} -3 \\ -7 \\ -5 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & r-27 \\ 0 & -5 & 4 & s-63 \\ 0 & -4 & 1 & t-45 \end{array}\right) \begin{array}{l} 5 \\ 4 \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \\ \\ \\ -\frac{9}{14} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & r-27 \\ 0 & 0 & 14 & s-63+5(r-27) \\ 0 & 0 & 9 & \underline{t-45+4(r-27)} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \vdots \\ 0 & 0 & 14 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

$* = 0$: én løsning

$* \neq 0$: ingen løsning

$$* = t-45+4(r-27) - \frac{9}{14}\left(s-63+5(r-27)\right) = 0 \quad \Big| \cdot 14$$

$$14\left(t-45+4(r-27)\right) - 9\left(s-63+5(r-27)\right) = 0$$

$$11r - 9s + 14t = 14\cdot 45 + 4\cdot 27 \cdot 14 - 9\cdot 63 - 9\cdot 5\cdot 27$$

$$\underline{\underline{11r - 9s + 14t = 360}}$$

5. Se løsning på nett.

6.

a) Bestem $(x,y) \neq (0,0)$ på C slik at $y' = -1$

C: $y^2 = 5x^2 - x^3 \iff \underbrace{y^2 - 5x^2 + x^3}_{g(x,y)} = 0$

$$y' = -\frac{g'_x}{g'_y} = -\frac{-10x + 3x^2}{2y} = \frac{10x - 3x^2}{2y} = -1$$

$$10x - 3x^2 = -2y$$

$$y = \frac{10x - 3x^2}{-2} = -5x + \frac{3}{2}x^2$$

$$y = \frac{x}{2}(3x - 10)$$

$$y^2 = 5x^2 - x^3$$

$$\frac{x^2}{4} \cdot (3x-10)^2 = 5x^2 - x^3 \quad | \cdot 4$$

$$x^2 \cdot (3x-10)^2 = 20x^2 - 4x^3 = x^2(20 - 4x)$$

$\downarrow$ $: x^2$ ← $x \neq 0$: $y = 0$ ⇒ $(0,0)$ Ser bort fra dette pkt.

$$(3x-10)^2 = 20 - 4x$$

$$9x^2 - 60x + 100 = 20 - 4x$$

$$9x^2 - 56x + 80 = 0$$

$$x = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot 9 \cdot 80}}{2 \cdot 9} = \frac{56 \pm 16}{18} = 4, 20/9$$

to pkt: $x = 4, y = 4$ eller $x = 20/9, y = -100/27$

b) Finn $(x, y; \lambda)$ som oppfyller L-betingelsene

$$L = x + y - \lambda(y^2 - 5x^2 + x^3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= 1 - \lambda \cdot (-10x + 3x^2) = 0 \\ L'_y &= 1 - \lambda \cdot (2y) = 0 \\ & y^2 - 5x^2 + x^3 = 0 \end{aligned}}$$

$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{-10x + 3x^2} \\ \lambda &= \frac{1}{2y} \end{aligned}\right\}$ sett $\lambda = \lambda$

$$\frac{1}{-10x+3x^2} = \frac{1}{2y}$$

$$2y = -10x + 3x^2$$

$$y = -5x + \tfrac{3}{2}x^2 = \underline{\frac{x}{2}(3x-10)}$$

$$y^2 - 5x^2 + x^3 = 0: \quad \frac{x^2}{4}(3x-10)^2 - 5x^2 + x^3 = 0$$

Som i oppg a)

$$\frac{x^2}{4} \cdot \left((3x-10)^2 - 20 + 4x \right) = 0$$

$x = 0$
$y = 0$
$1 \cdot \lambda \cdot 0 = 0$
umulig

eller

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 4 \\ \lambda &= \tfrac{1}{8} \end{aligned}}$$

eller

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 20/9 \\ y &= -100/27 \\ \lambda &= -27/200 \end{aligned}}$$

To kandidat pkt som oppfyller Lagrange betingelsene

6c
7
} Se løsning på nett.