Plan

1. Repetisjon Kap 7: Funksjoner i to variabler
2. Eksamen 12/2016 Oppgave 4-5

Repetisjonsforelesning:
20/05 kl 10-13
Eksamen 06/2021
Veiledn. fra kl 13

Kursevaluering
Husk å svare!

Repetisjon Kap 7

① **Optimering uten bibetingelser:** max/min $f(x,y)$

Metode:

i) Finne alle stasjonære pkt for f : $\boxed{\begin{matrix} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{matrix}}$ FOC
Sjekke unntakspkt (randpkt/kritiske pkt)

ii) For hvert stasjonært pkt (x^*,y^*), klassifiserer vi pkt. som lokal maks/lokal min/sadelpkt:

Andrederivert-testen: $H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{xy}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$tr = A + C$
samme fortegn som A

$\det = AC - B^2 > 0,\ A < 0$: lokalt maks
$\det = AC - B^2 > 0,\ A > 0$: lokalt min
$\det = AC - B^2 < 0$: sadelpkt

Eksamen 12/2016, Opps. 4

$f(x,y) = 23 - 4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y$

a) $f'_x = -8x - 8 = 0$ $x = -1$

$f'_y = -18y + 18 = 0$ $y = 1$

Stasjonære pkt: $(x,y) = (-1,1)$

b) $f''_{xx} = -8$ $f''_{xy} = 0$

$f''_{yx} = 0$ $f''_{yy} = -18$

$H(f) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$

$H(f)(-1,1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$

$\det = AC - B^2 = (-8)(-18) - 0^2 = +144 > 0$

$\mathrm{tr} = A + C = -26 < 0$

andre-derivert-testen $\Rightarrow$ $(-1,1)$ er et lokalt maks

c) Lokal approksimasjon til f i $(1,0)$:

$L(x,y) = f(1,0) + f'_x(1,0)\cdot(x-1) + f'_y\cdot(1,0)\cdot(y-0)$

$= 11 + (-16)(x-1) + 18(y-0)$

$= 11 - 16(x-1) + 18y$

d) Maks/min for f: Kandidatpkt: $(-1,1)$ lokalt maks

$f = 23 - 4 - 9 + 8 + 18 = 36$

Finnes ikke minimum siden vi ikke har lokale min.

Maks: $f(x,y) = 23 - 4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y$

$= -4x^2 - 8x \quad -9y^2 + 18y \quad +23$

$= -4(x^2 + 2x + 1) - 9(y^2 - 2y + 1) + 23 + 4 + 9$

$= 36 - 4(x+1)^2 - 9(y-1)^2 \leq 36$ for alle x, y

Konklusjon: $f_{max} = 36$ i $(-1,1)$

② Optimering med bibetingelser

max/min $f(x,y)$ med likninger/ulikheter som bibetingelser

Eks: i) $g(x,y) = a$
ii) $g(x,y) \le a$
iii) $a \le x \le b$ og $c \le y \le d$

$D = \{(x,y)$: alle bibetingelser er oppfylt$\}$ tillatte pkt.

Metode:

i) Kandidatpkt:
i) Indre pkt for D som er stasjonære pkt for f
ii) Randpkt for D

Lagrangeproblem: $g(x,y) = a$

i) Løsning av Lagrange-betingelsene

FOC $\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \end{cases}$

C $\{$ $g(x,y) = a$

ordinære kandidatpkt

ii) Tillatte pkt m/ degenerert bibetingelse

$g'_x = 0$
$g'_y = 0$
$g(x,y) = a$

unntakspkt ← pkt på D som ikke har entydig tangent

ii) Undersøke om kandidatpkt er maks/min.

Ekstremverdisetning:

D kompakt (lukket og begrenset)
f kont
⇓
f har maks og min på D

③ Kurven $f(x,y) = c$:

Bør vite om:

a) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ sirkel $x^2+y^2=4$

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ellipse $4x^2+9y^2=36$

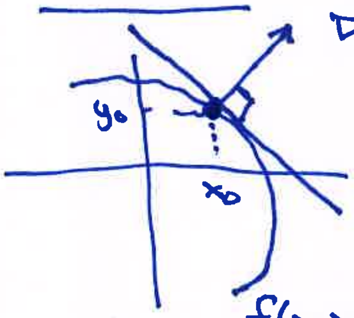
$(x-x_0)\cdot(y-y_0) = c$ hyperbel $xy = 4$

$ax+by = c$ rett linje

$\left.\begin{matrix} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{matrix}\right\}$ parabel

Tangenter: $f(x,y)=c$

$\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$



tangenten til $f(x,y)=c$ i pkt. (x_0,y_0): $y-y_0 = y'(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)$

der $y'(x_0,y_0) = -\dfrac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$

Eksamen 12/2016, Opps 5

max/min $f(x,y) = 36-4x^2-9y^2$ når $xy=4$

$y = 4/x$

a) **Nivåkurven $xy=4$:**

$g(x,y) = xy = 4$: $\quad y' = -2$

$g'_x = y \qquad -\dfrac{g'_x}{g'_y} = -2$

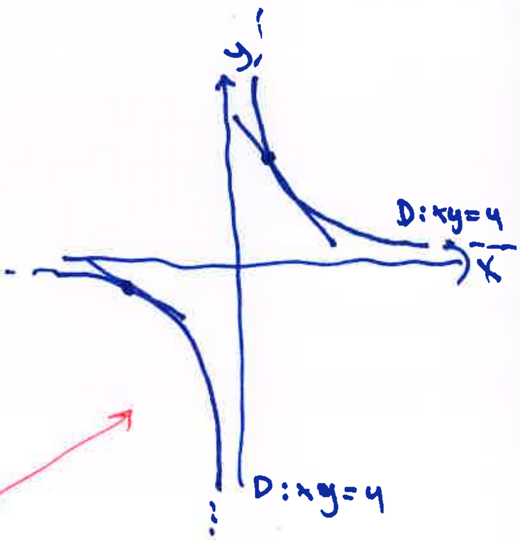
$g'_y = x \qquad -\dfrac{y}{x} = -2$

$\underline{y = 2x}$

$xy=4$

$x\cdot 2x = 4 \qquad x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Pkt: $(x,y) = \underline{(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})}, \underline{(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})}$



b) **Skisse av D:** D er en hyperbel

D er ikke begrenset fordi $x=a, y=4/a$ for alle $a \neq 0$.

c) maks/min $f(x,y) = 36-4x^2-9y^2$ når $xy=4$

Lagrange's metode: $L = 36-4x^2-9y^2-\lambda(xy-4)$

FOC
$$\begin{cases} L'_x = -8x-\lambda\cdot y = 0 \\ L'_y = -18y-\lambda\cdot x = 0 \\ C \quad xy = 4 \end{cases}$$

$8x = -\lambda y \Rightarrow x = \frac{-\lambda y}{8}$

$-18y - \lambda\cdot\left(-\frac{\lambda y}{8}\right) = 0 \quad |\cdot(-8)$

$144y + \lambda^2 y = 0$

$y(144 - \lambda^2) = 0$

$y=0$ eller $\lambda^2 = +144$

$y=0$: $xy = 0 \neq 4$ umulig

$\lambda = 12$ eller $\lambda = -12$

$\lambda = 12$: $x = \frac{-12y}{8} = -\frac{3}{2}y$

$xy = \left(-\frac{3}{2}y\right)y = 4$

$3y^2 = -8$

$y^2 = -8/3$ umulig

$\lambda = -12$: $x = \frac{12y}{8} = \frac{3y}{2}$

$xy = \left(\frac{3y}{2}\right)\cdot y = 4$

$3y^2 = 8$

$y^2 = 8/3$

$y = \pm\sqrt{8/3}$

$x = \pm\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}$

Ordinære kandidatpkt:

$(x,y;\lambda) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}; -12\right)$,

$\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{8}{3}}; -12\right)$

tillatte pkt m/ degenerert bibetingelse:

ingen, siden $xy=4$ er en hyperbel

Alt: $g'_x = y = 0$, $g'_y = x = 0$, $xy = 4$ — ingen pkt.

d) Maks/min:

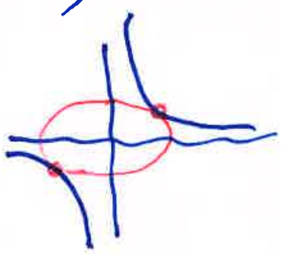
i) innsettingsmetoden: $y = 4/x$

$f(x, 4/x) = 36-4x^2-9(4/x)^2$
$= 36-4x^2-144/x^2$

ii) Se på nivåkurver $f(x,y) = c$ og $xy = 4$

$36-4x^2-9y^2 = c$

$\boxed{4x^2+9y^2 = 36-c}$ ellipse for $c<36$



Alt: ii) Innsettingsmetoden:

$$y = 4/x \Rightarrow f(x, 4/x) = 36 - 4x^2 - 9(4/x)^2$$
$$= 36 - 4x^2 - 144/x^2 = f(x)$$

$$f'(x) = -8x - 144\cdot(-2\cdot x^{-3})$$
$$= -8x + 288/x^3 = \frac{-8x^4 + 288}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \mid -8x^4 + 288 = 0$$
$$\frac{8x^4}{8} = \frac{288}{8} = 36$$
$$x^4 = 36$$
$$x^2 = \pm\sqrt{36} = \pm 6 = 6$$
$$x = \pm\sqrt{6}$$

$f_{max} = -12$

når $(x, y) =$

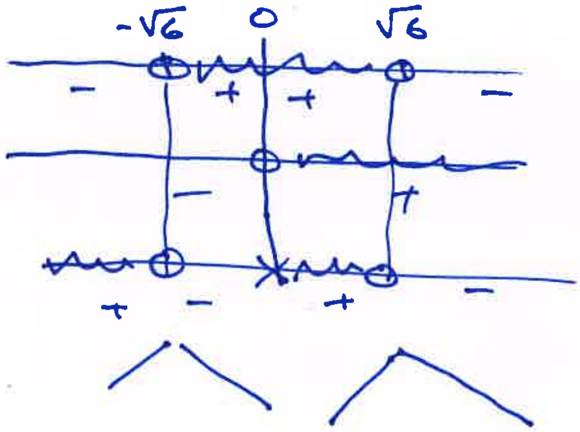
$(\sqrt{6}, 4/\sqrt{6})$,

$(-\sqrt{6}, -4/\sqrt{6})$

$-8x^4 + 288$

x^3

$f'(x)$



$x = \pm\sqrt{6}$: $x = \sqrt{6}$ $y = 4/\sqrt{6}$ $f = 36 - 24 - 9\cdot\frac{16}{6} = 36 - 24 - 24 = -12$

$x = -\sqrt{6}$ $y = -4/\sqrt{6}$ $f = -12$

Sjekk:

$$\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{9}{4}}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{\cancel{9}^3\cdot 8^2}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}}} = \sqrt{6} \text{ ok}$$
$$\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{16}{6}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \text{ ok}$$

stemmer med pkt fra Lagrange-utregningen.

Alt. ii): Nivåkurver

$f(x,y) = 36 - 4x^2 - 9y^2 = c$

$4x^2 + 9y^2 = 36 - c$ ellipse for $c < 36$

$$\frac{4x^2}{36-c} + \frac{9y^2}{36-c} = 1$$

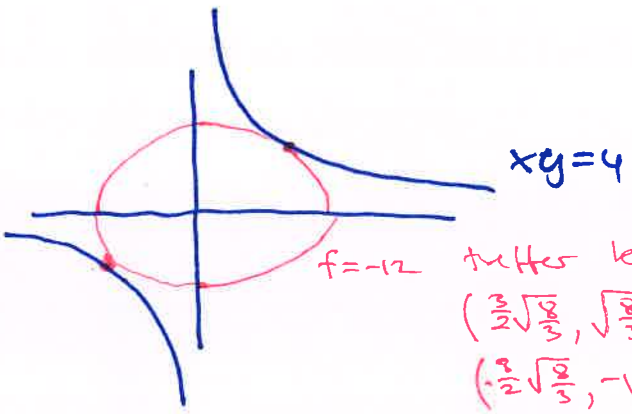
$$\frac{x^2}{\left(\frac{36-c}{4}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{36-c}{9}\right)} = 1$$

Senter i $(0,0)$

halvakser:

$a = \frac{\sqrt{36-c}}{2}$ $\quad b = \frac{\sqrt{36-c}}{3}$

"jo større c, jo mindre ellipser"



treffer kandidatpkt.

$\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}; -12\right)$

$\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{8}{3}}; -12\right)$

Siden $f = -12$ i disse punktene

$\left(a = \sqrt{12} \quad b = 4/\sqrt{3}\right)$

$f > -12$ er ikke mulig på D, siden det ville svare til ellipser med mindre halvakser

$f < -12$ er mulig på D siden det svarer til ellipser med større halvakser.

$\Downarrow$

Konkl:

$f_{max} = -12$ i $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{3}}, \pm\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$

med $\lambda = -12$

Ingen minimum