Plan

1 Lagrange-problemer
2 Lagranges multiplikatormetode

Foreleśn. 31: Fredag kl. 10-12
Veiledn. kl 12-15

Foreleśn. 32: Tirs. kl 10-12
Veil. kl 12-15

Repetisjonsf. mellom 13/05 og 24/05.

Husk kursevaluering!

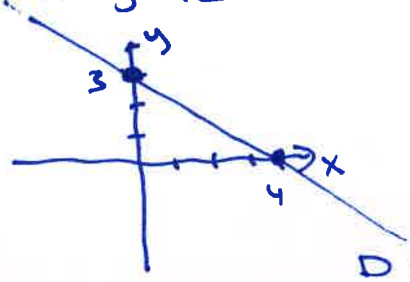
① Lagrange-problemer

Defn: Et Lagrange-problem er et optimeringsproblem (max/min) med likninger som bibetingelser.

fn. i (x,y) en konstant

$$\boxed{\max/\min \ \underbrace{f(x,y)}_{\text{fn. i to variabler}} \quad \text{når} \quad \underbrace{g(x,y)=a}_{\text{bibetingelse = én likning}}}$$

Eks: min $f(x,y)=x^2+y^2$ når $3x+4y=12$



D: $3x+4y=12$
ikke begrenset

Lagrange-problem:
alle pkt i D er randpkt

Generell metode:

i) Kandidatpkt: Lagrange-problem
- ~~indre stasjonære~~ pkt
- ~~indre kritiske~~ pkt
- $\boxed{\text{randpkt}}$

ii) Avgjøre om kand. pkt er maks/min:

- Ekstremverdisetningen: automatisk oppfylt for Lagrange-problem.

Hvis D er kompakt (lukket og begrenset) og f er kont., så har f alltid maks/min på D.

② Lagranges multiplikatormetode

Eks: $\min f(x,y) = x^2+y^2$ når $\underbrace{3x+4y}_{g(x,y)} = \underbrace{12}_{a}$

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda\cdot(g(x,y)-a) \leftarrow \text{Lagrange fn.}$$

$\uparrow$ lambda, gresk l
Lagrange multiplikator.

$$= x^2+y^2-\lambda(3x+4y-12)$$

Lagranges multiplikatormetode: Kandidat pkt = stasjonære pkt for L

FOC: $\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda\cdot g'_x = 2x-\lambda\cdot 3 = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda\cdot g'_y = 2y - \lambda\cdot 4 = 0 \end{cases}$

C: $L'_\lambda = -1\cdot(g(x,y)-a) = -1\cdot(3x+4y-12) = 0$

Kommentarer:
$L'_\lambda = -1\cdot(g(x,y)-a) = 0$
$g(x,y)-a=0$
$\boxed{g(x,y)=a}$

Lagrangebetingelsene = FOC+C

$$\boxed{\begin{aligned} 2x-3\lambda&=0 \\ 2y-4\lambda&=0 \\ 3x+4y&=12 \end{aligned}}$$

$2x = 3\lambda$ $\quad x = \frac{3\lambda}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{24}{25} = \frac{36}{25}$

$2y = 4\lambda$ $\quad y = 2\lambda = 48/25$

$3\left(\frac{3\lambda}{2}\right) + 4(2\lambda) = 12 \quad |\cdot 2$

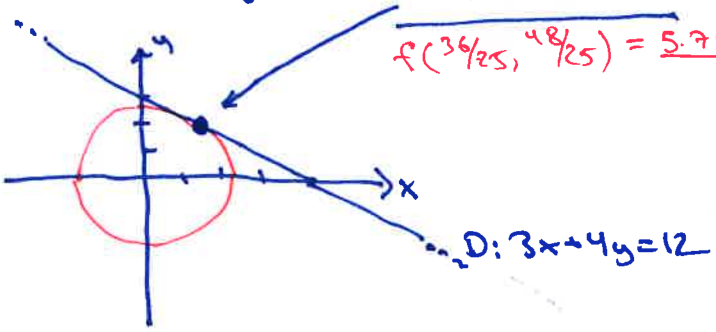
$9\lambda + 16\lambda = 24$

$25\lambda = 24$

$\lambda = 24/25$

Et pkt som oppfyller FOC+C: $(x,y;\lambda) = \left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}; \frac{24}{25}\right)$

$f(36/25, 48/25) = 5.76$



Eks: max/min $f(x,y)=x^2+y^2$ når $3x+4y=12$

Nivåkurver for f:

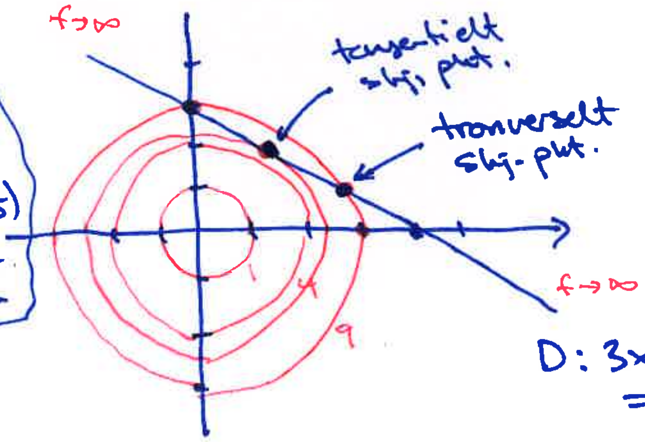
$f(x,y)=c$

$x^2+y^2=c$

$c=1$: $x^2+y^2=1$ $c=9$: $x^2+y^2=9$

$c=4$: $x^2+y^2=4$

Konkl:
i) ingen max
i) $f_{min}=5.76$
i $(36/25, 48/25)$
med $\lambda = 24/25$



D: $3x+4y=12$

$\frac{4y}{4} = \frac{12-3x}{4}$

$y = 3 - \frac{3}{4}x$

Generelt: $x^2+y^2=c$ $\begin{cases} \text{sirkel } r=\sqrt{c} & \text{hvis } c>0 \\ \text{senter } (0,0) & \\ \text{pkt. } (0,0) & c=0 \\ \text{ingen pkt.} & c<0 \end{cases}$

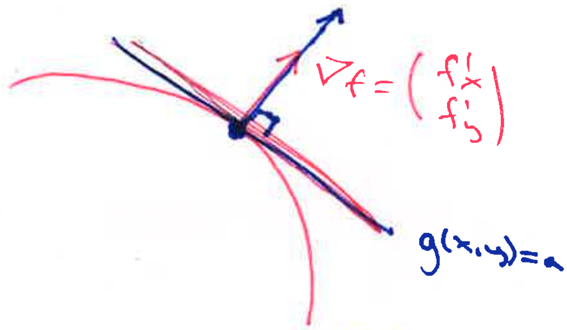
Kandidatpkt = tangentielle skj. pkt mellom $g(x,y)=a$ og $f(x,y)=c$,

dvs. der $-\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{g'_x}{g'_y}$

$\nabla g = \begin{pmatrix} g'_x \\ g'_y \end{pmatrix}$

(1) $-\frac{2x}{2y} = -\frac{3}{4}$ $|\cdot 4y$

$4x = 3y \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$



(2) $3x+4y=12$

$3x+4\left(\frac{4x}{3}\right)=12$ $|\cdot 3$

$9x+16x=36$

$25x=36$

$x = \underline{\underline{36/25}}$

$f(x,y)=c$ og $g(x,y)=a$ møtes i en tangent

$\Updownarrow$

$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$

FOC $\boxed{\begin{array}{l} f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} g'_x \\ g'_y \end{pmatrix}$

Teorem:

Hvis (x^*, y^*) er maks eller min i et Lagrangeproblem

$$\max/\min f(x,y) \quad \text{når} \quad g(x,y) = a.$$

så har vi enten i) det finnes en λ slik at $(x^*, y^*; \lambda)$ oppfyller Lagrangebetingelsene FOC+C,

ordinære kandidatpkt. → dvs $\boxed{L'_x = 0, \; L'_y = 0, \; g(x,y) = a}$

eller ii) bibetingelsen er degenerert i (x^*, y^*),

unntakspkt → dvs $\boxed{g'_x = 0, \; g'_y = 0, \; g(x,y) = a}$

$g'_x = g'_y = 0$: degenerert bibetingelse $\Rightarrow$ $g(x,y) = a$ har ikke en entydig tangent i pktet.