MET 1181, 3. forelesning, 7. sept. 2021, Runar Ile

Plan:
1. Nåverdier av kontantstrømmer
2. Rekker
3. Annuiteter

---

1. Nåverdier av kontantstrømmer

<u>Nåverdi</u> av et beløp (K) betalt n år (terminer) fra nå med en gitt rente r
= det du må sette i banken i dag (K_0) for å få K om n år hvis renten er r.

Fordi $K = K_0 \cdot (1+r)^n$ så er

nåverdien $$K_0 = \frac{K}{(1+r)^n}$$

<u>Eks</u> 50 000 (K) om 3 år med 4% rente har nåverdi

$$K_0 = \frac{50\,000}{1{,}04^3} = \underline{\underline{44\,449{,}82}}$$

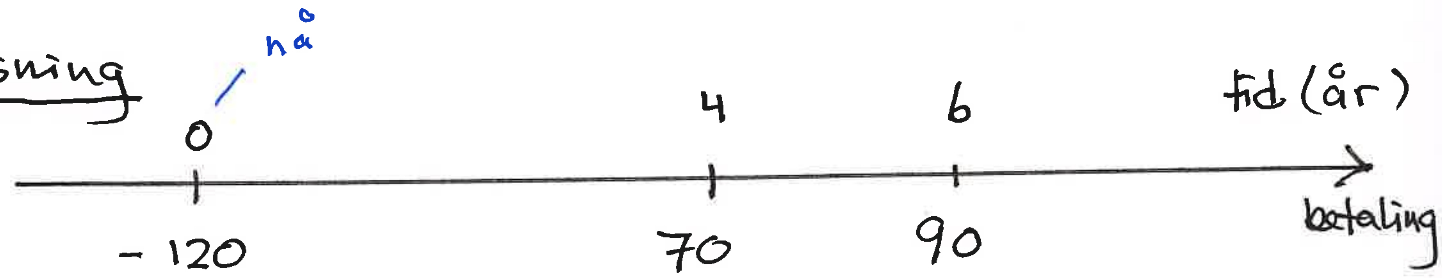
Dvs: Hvis du setter 44 449,82 på konto i dag med 4% rente vil du ha 50 000 på konto om 3 år.

<u>Eks</u> En investering på 120 mill. skal gi utbetalinger på 70 mill om 4 år og 90 mill om 6 år. Anta renten er 12 %.

a) Bestem nåverdien til kontantstrømmen.
b) Vurdér om dette er en god investering.

<u>Løsning</u>

a)



$$\frac{70}{1{,}12^4}$$

$$\frac{90}{1{,}12^6}$$

= nåverdien av kontantstrømmen

$$= -120 + \frac{70}{1{,}12^4} + \frac{90}{1{,}12^6} = \underline{\underline{-29{,}92}}$$

b) Man får ikke 12 % på denne investeringen.

Faktisk er (prøver & feiler, plotter) internrenten til kontantstrømmen (tilnærmet) 5,81 %

$$\text{fordi} \quad -120 + \frac{70}{1{,}0581^4} + \frac{90}{1{,}0581^6} = 0{,}0$$

5,81 % kan tolkes som den årlige avkastningen på denne investeringen.

2. Rekker – lange addisjonsstykker

Eks $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{100}$ er en rekke

et ledd

med 10 ledd.

tredje ledd   tiende ledd

Vi skriver $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}$

Geometriske rekker $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ der hvert ledd er k ganger det foregående leddet (k er et tall!)

$$a_2 = k \cdot a_1$$

$$a_3 = k \cdot a_2 = k \cdot k \cdot a_1 = k^2 \cdot a_1$$

$$a_4 = k \cdot a_3 = k \cdot k^2 \cdot a_1 = k^3 \cdot a_1$$

$$\vdots$$

$$a_n = k^{n-1} \cdot a_1$$

Vi kan finne et uttrykk for denne summen:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + \ldots + k^{n-1} a_1$$

$$= a_1 \cdot (\underbrace{1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^{n-1}}_{\frac{k^n - 1}{k - 1}})$$

$$= a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Oppgave Beregn summen

$$5 + 5\cdot 1{,}003 + 5\cdot 1{,}003^2 + 5\cdot 1{,}003^3 + \dots + 5\cdot 1{,}003^{60}$$

Løsning Dette er en geometrisk rekke

$a_1 = 5$, $k = 1{,}003$ og $n = 61$

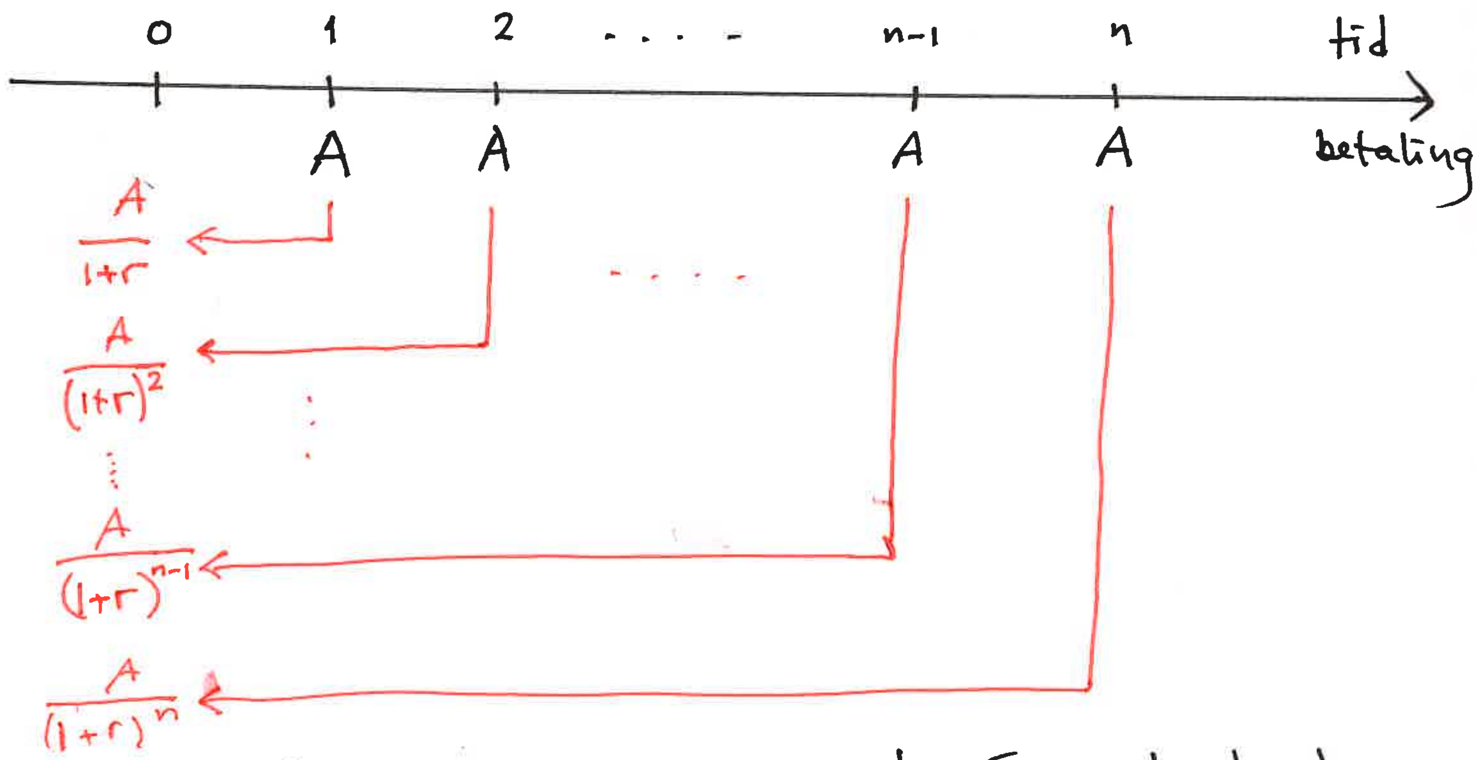
Da er summen $5\cdot\dfrac{1{,}003^{61}-1}{1{,}003-1} = 5\cdot\dfrac{1{,}003^{61}-1}{0{,}003}$

$= \underline{\underline{334{,}14}}$

Start 9.00

---

4. Annuiteter – jevne kontantstrømmer



Summen er nåverdien til den jevne kontantstrømmen. Dette er en geom. rekke med

$a_1 = \dfrac{A}{1+r}$, antall ledd $= n$, $k = \dfrac{1}{1+r}$

Da er summen $\dfrac{A}{1+r}\cdot\dfrac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1+r}\right) - 1}$

dette er ikke så pent!

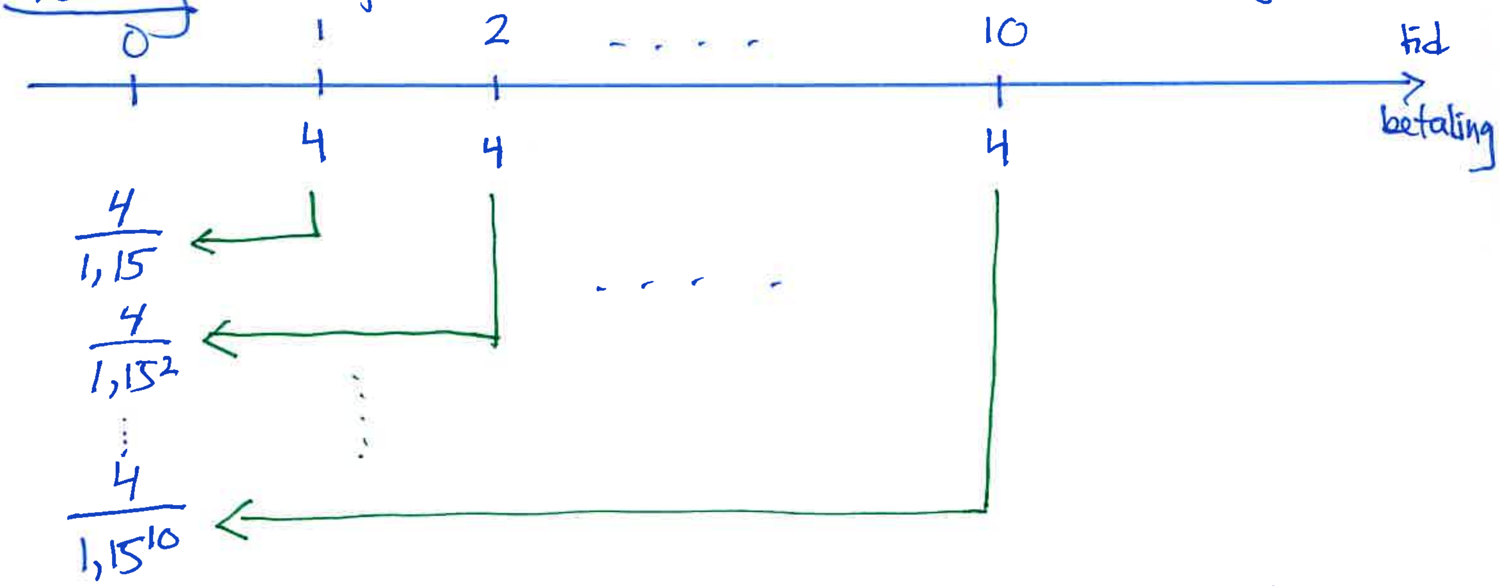
Men summen er også en geometrisk rekke den andre veien. Da med

$$a_1 = \frac{A}{(1+r)^n}, \quad n \text{ ledd}, \quad k = 1+r$$

Summen er da $\frac{A}{(1+r)^n} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

<u>Oppgave</u> Hege vurder en investering. Det skal betales ut 4 mill. hvert år i 10 år. Første utbetaling er om ett år. Diskonteringsrenten er 15 %. Hva er en balansert pris i dag for denne betalingsstrømmen?

<u>Løsning</u> Vi finner nåverdien av betalingsstrømmen



---

summen er nåverdien av kontantstrømmen. Det er en geom. rekke med $a_1 = \frac{4}{1{,}15^{10}}$, $k = 1{,}15$, $n = 10$

og formelen gir $\frac{4}{1{,}15^{10}} \cdot \frac{1{,}15^{10} - 1}{0{,}15} = \underline{\underline{20{,}08}}$

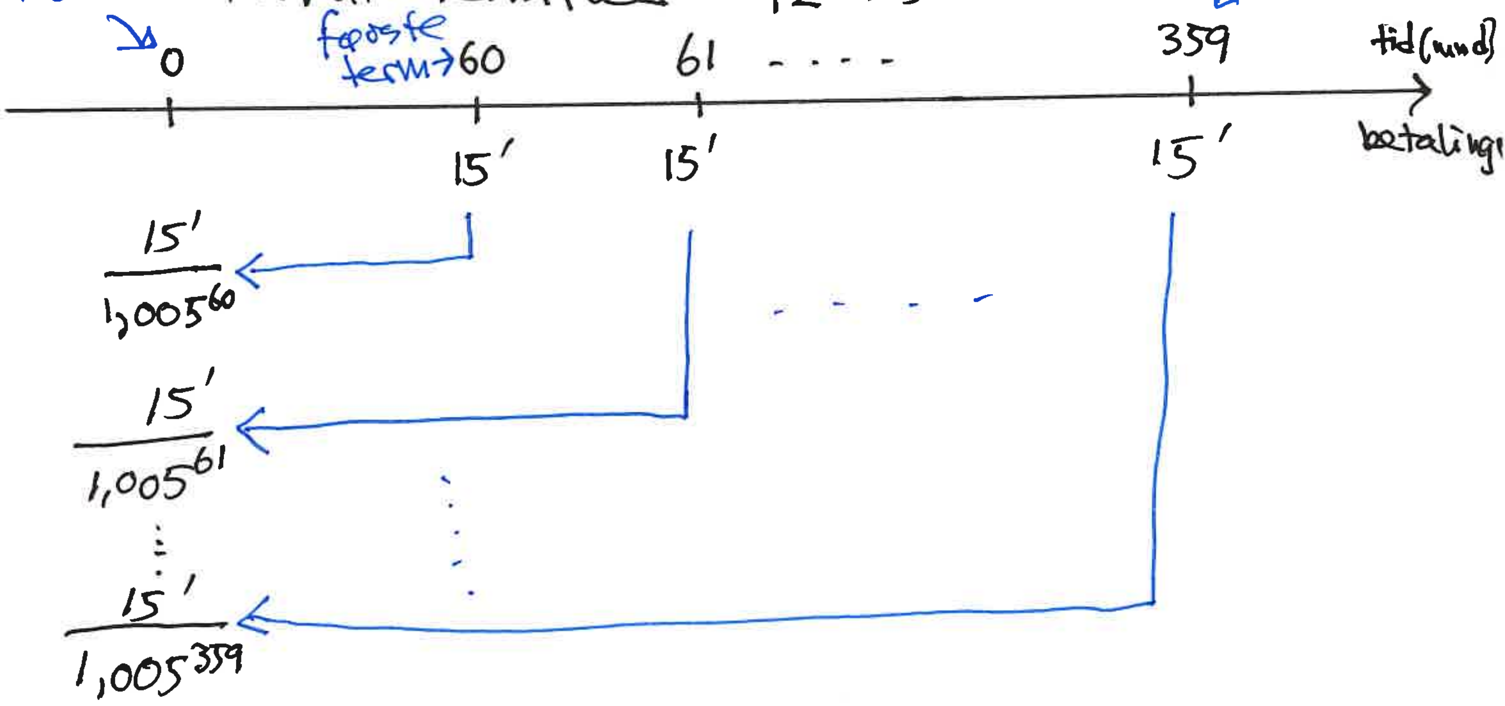
Eks (Fagoppg. 2019 høst, oppg 6a)

Kåre vurderer et boliglån med månedlige terminer over 25 år. Han regner med å kunne betale 15 000 per måned. Første termin er om 5 år. Renten er 6 % med månedlig forrentning

- Finn den geom. rekken som gir nåverdien til kontantstrømmen.
- Beregn hvor mye Kåre kan låne.

Løsning Månedsrente $\frac{6\%}{12} = 0{,}5\,\%$

nå Antall terminer $12 \cdot 25 = 300$ siste termin



Summen (nåverdien) er en geom. rekke med

$a_1 = \frac{15'}{1{,}005^{359}}$, $k = 1{,}005$, $n = 300$

Nåverdi = lånebeløp: $\frac{15'}{1{,}005^{359}} \cdot \frac{1{,}005^{300} - 1}{0{,}005} = \underline{\underline{1734620{,}76}}$