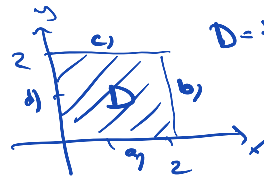
Eks: max/min $f(x,y) = e^{xy-x+y}$ når $0 \le x, y \le 2$

$= e^u, \; u = xy - x + y$



$D = \{(x,y) : 0 \le x, y \le 2\}$

Kandidatpkt:

i) $f'_x = e^u \cdot u'_x = e^u \cdot (y-1) = 0$ $\quad y = 1$

$f'_y = e^u \cdot u'_y = e^u \, (x+1) = 0$ $\quad x = -1$

$(-1,1)$ ikke indre pkt i D $\Rightarrow$ ingen stasjonære pkt for f som er indre pkt for D

ii) Ingen andre kritiske pkt for f (f'_x, f'_y er definert overalt)

iii) **Randpkt for D:**

a) $y = 0, \; 0 \le x \le 2$: $f(x,0) = e^{-x}$, $0 \le x \le 2$

$\boxed{(e^{-x})' = -e^{-x} < 0 \text{ for } x \in [0,2]}$ $\rightarrow$ e^{-x} avtagende på $[0,2]$

$x = 0$ — $2 = x$

max: $f(0,0) = e^{-0} = \underline{1}$

min: $f(2,0) = e^{-2} = \underline{1/e^2}$

(blant pkt på a)

b) $x = 2, \; 0 \le y \le 2$: $f(2,y) = e^{2y-2+y} = e^{3y-2}$, $0 \le y \le 2$

$\boxed{(e^{3y-2})' = 3e^{3y-2} > 0}$ $\rightarrow$ e^{3y-2} voksende på $[0,2]$

$y = 0$ — $y = 2$

max: $f(2,2) = e^{6-2} = \underline{e^4}$

min: $f(2,0) = e^{-2} = \underline{1/e^2}$

(på b)

c) $y = 2, \; 0 \le x \le 2$: $f(x,2) = e^{2x-x+2} = e^{x+2}$, $0 \le x \le 2$

$\boxed{(e^{x+2})' = e^{x+2} > 0}$ $\rightarrow$ e^{x+2} voksende på $[0,2]$

$x = 0$ — $x = 2$

max: $f(2,2) = e^{2+2} = \underline{e^4}$

min: $f(0,2) = \underline{e^2}$

(på c)

d) $x = 0, \; 0 \le y \le 2$: $f(0,y) = e^y$, $0 \le y \le 2$

$\boxed{(e^y)' = e^y > 0}$ $\rightarrow$ e^y voksende på $[0,2]$

$y = 0$ — $y = 2$

max: $f(0,2) = \underline{e^2}$

min: $f(0,0) = \underline{1}$

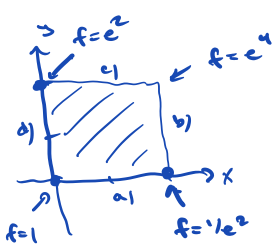
(på d)

D lukket og begrenset (kompakt)

$\Rightarrow$ f har max/min i D (E.V.S. — ekstremverdi-setningen)

$\Rightarrow$ max/min er kandidat pkt. med størst/minst verdi

Konklusjon:



alle kandidatpkt er randpkt for D, og blant disse er største verdi $\underline{f(2,2) = e^4} \approx 55$ og minste verdi $f(2,0) = e^{-2} = 1/e^2 \approx 0.14$

Pga. ekstremverdisetningen har vi

$f_{max} = e^4$; $(2,2)$

$f_{min} = 1/e^2$; $(2,0)$

max/min-verdi — max/min-pkt