Plan

1. Stasjonære punkter
2. Andrederivert-testen
3. Globale maksimum og minimum

Optimiseringsproblem: $\max/\min \; f(x,y)$

Defn:

(x^*,y^*) er maksimumspkt for f hvis $f(x^*,y^*) \geq f(x,y)$ for alle (x,y) i D_f

(x^*,y^*) er minimumspkt for f hvis $f(x^*,y^*) \leq f(x,y)$ for alle (x,y) i D_f

Eks:

$\max/\min \; f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

Resultat:

Hvis (x^*,y^*) er et maks/min for f, da har vi én av følgende tilfeller:

i) (x^*,y^*) er et stasjonært pkt: $f'_x(x^*,y^*) = f'_y(x^*,y^*) = 0$

ii) enten $f'_x(x^*,y^*)$ eller $f'_y(x^*,y^*)$ eksisterer ikke

iii) (x^*,y^*) er et randpunkt for D_f.

Pkt av type i) eller ii): Kritisk punkt

Hvis f er en "fin" funksjon (for eksempel et polynom), så finnes ingen pkt av type ii) eller iii).

Vi kaller alle pkt av type i), ii), iii) kandidatpunkter.

Eks: $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ polynomfunksjon, $D_f = \mathbb{R}^2$

Kandidatpkt = stasjonære pkt

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + 3y = 0 \\ f'_y &= 3x + 3y^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ førsteordens-betingelser (FOC)

$x^2 + y = 0 \longrightarrow y = -x^2$

$x + y^2 = 0$

$x + (-x^2)^2 = 0$

$x + x^4 = 0$

$x \cdot (1 + x^3) = 0$

$x = 0$ eller $1 + x^3 = 0$

$x = 0$	$x^3 = -1$
$y = 0$	$x = \sqrt[3]{-1} = \underline{-1}$
$\Downarrow$	$y = -1$
$(x,y) = \underline{(0,0)}$	$\Downarrow$
	$(x,y) = \underline{(-1,-1)}$

Kandidatpkt = stasjonære pkt: $(x,y) = \underline{(0,0)}$, $\underline{(-1,-1)}$

$f(0,0) = 0$ kandidat for min

$f(-1,-1) = 1$ kandidat for maks

② Andrederivert-test

Defn: ~~La (x^*,y^*) være et stas~~

Et pkt (x^*,y^*) kalles et lokalt maks. for f hvis $f(x^*,y^*) \geq f(x,y)$ for alle pkt (x,y) i nærheten av (x^*,y^*), og lokalt minimum for f hvis $f(x^*,y^*) \leq f(x,y)$ for alle pkt. (x,y) i nærheten av (x^*,y^*).

Et stasjonært pkt som hverken er lokalt maks eller min kalles et sadelpkt.

Andrederivert-testen:

Hvis (x^*, y^*) er et stasjonært pkt for f og

$$H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{xy}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Da har vi:

(1) Hvis $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 > 0$ og $\operatorname{tr} H(f)(x^*,y^*) = A + C > 0$, så er (x^*,y^*) et lokalt min for f

(2) Hvis $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 > 0$ og $\operatorname{tr} H(f)(x^*,y^*) = A + C < 0$, så er (x^*,y^*) et lokalt maks for f

(3) Hvis $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 < 0$, så er (x^*,y^*) et sadelpkt for f

Hvis $\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2 = 0$, sier testen ikke hvordan vi kan klassifisere (x^*,y^*).

Eks: (fortsatt) $f = x^3 + 3xy + y^3$ $\quad f'_x = \underline{3x^2 + 3y}$, $\quad f'_y = \underline{3x + 3y^2}$

Stasjonære pkt: $(0,0), (-1,-1)$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

For $(0,0)$: $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det = AC - B^2 = 0 - 9 = -9 < 0$

$(0,0)$ er et sadelpkt for f

For $(-1,-1)$: $H(f)(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad \det = AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0$

$\operatorname{tr} = A + C = -6 + (-6) = -12 < 0$

$(-1,-1)$ er et lokalt maks for f

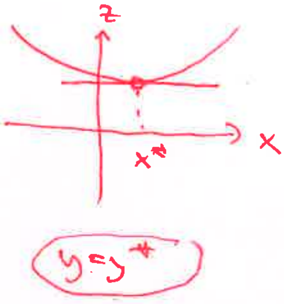
Merk: i) Hvis $\det = AC - B^2 > 0$, så har vi $AC > B^2 \geq 0$, dvs $AC > 0$

Da er $A, C > 0$ eller $A, C < 0$

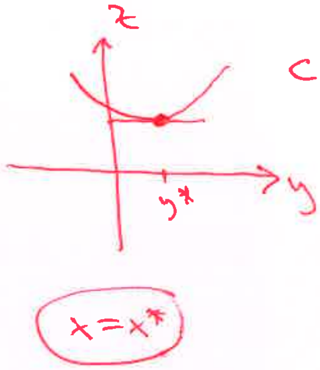
$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$A + C > 0$ $\qquad$ $A + C < 0$

ii) Tilfelle 1: $AC-B^2>0$, $A+C>0$ $(A, C>0)$

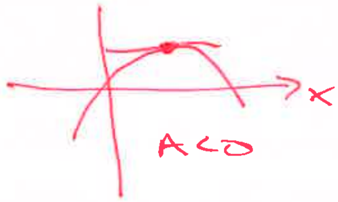


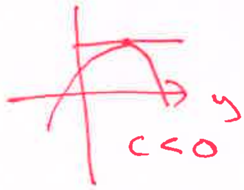
$A=f''_{xx}(x^*,y^*) > 0$



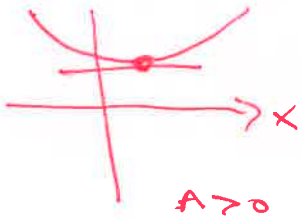
$C=f''_{yy}(x^*,y^*) > 0$

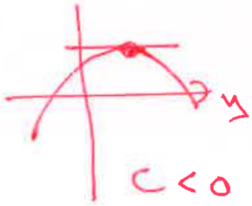
Tilfelle 2: $AC-B^2>0$, $A+C<0$
$A, C<0$





Tilfelle 3: $AC-B^2<0$ Typisk har A, C motsatte fortegn.





③ Globale maksimum og minimum

Maksimum = globalt maksimum $\Rightarrow$ lokalt maks.
Minimum = globalt minimum $\Rightarrow$ lokalt min

Ex: $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ Kandidatpkt: $(0,0)$, $(-1,-1)$

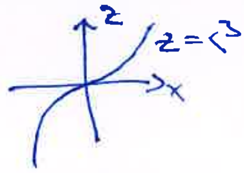
	$(0,0)$	$(-1,-1)$
	$f=0$	$f=1$
	kandidat for min	kandidat for maks
	Sadelpkt	lokalt maks

Globale maks/min:

1) $\min f(x,y) = x^3+3xy+y^3$; fins ikke

2) $\max f(x,y) = x^3+3xy+y^3$; $f(-1,-1)=1$ kandidat for max

Ad hoc: $y=0$ $f(x,0) = x^3$



$f(x,y) \to \infty$ når $y=0$ og $x \to \infty$

eller

$f(10,0) = 1000 + 0 + 0$
$= \underline{1000} > 1$

det fins ikke maks.

Pkt av type ii) og iii): Unntakspkt

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{u} = u^{1/2}$, $u = x^2+y^2$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$

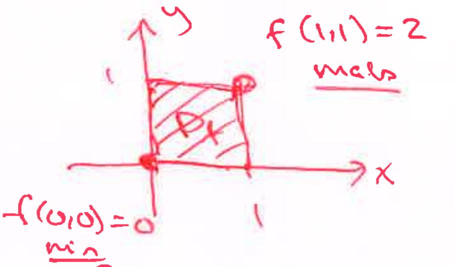
$$f'_x = \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot u'_x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y = \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot u'_y = \frac{2y}{2\sqrt{u}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_x(0,0) = \frac{0}{0} = f'_y(0,0) \leftarrow \text{ikke defn}$$

(0,0) er kritisk pkt (type ii) og et minimum for f.

Eks: $f(x,y) = x+y$, $D_f: 0 \leq x,y \leq 1$



Randpkt for D_f = de fire sidekantene.

④ Lineær approksimasjon

Den lineære approksimasjonen til $f(x,y)$ i pkt. (a,b) er: = tangentplanet til f i (a,b)

$$\boxed{\begin{aligned} L(x,y) = f(a,b) &+ f'_x(a,b)\cdot(x-a) \\ &+ f'_y(a,b)\cdot(y-b) \end{aligned}}$$

Eks: max/min $f(x,y) = x^2y^3 + y^2 - 2y$

i) Kandidatpkt = stasjonære pkt:

$f'_x = 2xy^3 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{x=0}$ eller $y=0$

$f'_y = 3x^2y^2 + 2y - 2 = 0 \qquad 2y - 2 = 0, \ \underline{y=1} \ \Big| \ -2 = 0$ umulig

Stasj. pkt: $(x,y) = \underline{(0,1)}$, $f = -1$

ii) Klassifikasjon:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y + 2 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \det &= AC - B^2 = 4 > 0 \\ \mathrm{tr} &= A + C = 4 > 0 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$(0,1)$ er lokalt min for f

iii) Globale max/min:

max: Ingen lokale max $\Rightarrow$ ingen max for f

min: Kandidat $f(0,1) = -1$ (lokalt min)

Ad hoc: $x = 1$: $f(1,y) = y^3 + y^2 - 2y \rightarrow -\infty$ når $y \rightarrow -\infty$

evt. $f(1,-10) = (-10)^3 + (-10)^2 - 2(-10)$
$= -1000 + 100 + 20 = -880 < -1$

Ingen min for f