MET 1180, forelesning 27, 23. mars 2022, Runar Ile

1. Partiellderivasjon og Hessematrisen
2. Tangenter til nivåkurver
3. Gradienten og retningsderiverte

1. Partiellderivasjon

Har funksjon $z = f(x,y)$

Definisjon

$$f_x'(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \text{ varierer} \\ y \text{ er konst.} \end{array} \right.$$

$$f_y'(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \text{ er konst.} \\ y \text{ varierer} \end{array} \right.$$

Notasjon $\frac{dz}{dx} = f_x' = f_x'(x,y)$, $\frac{dz}{dy} = f_y' = f_y'(x,y)$

Eksempler

i) $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 2y$ gir $f_x' = 2x - 4$

og $f_y' = 2y + 2$

ii) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ gir $f_x' = 3x^2 - 3y$

og $f_y' = -3x + 3y^2$

iii) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ gir $f_x' \overset{\text{kjerner.}}{=} \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{u}} \cdot \cancel{2}x$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

og $f_y' \overset{\text{kjerner.}}{=} \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{u}} \cdot \cancel{2}y$

$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Setter

$u = x^2 + y^2$, $g(u) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$

$u_x' = 2x$, $g(u) = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$u_y' = 2y$

og bruker kjerneregelen

Tolkning av de partiell deriverte

Eks $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ med $f'_x = 3x^2 - 3y$

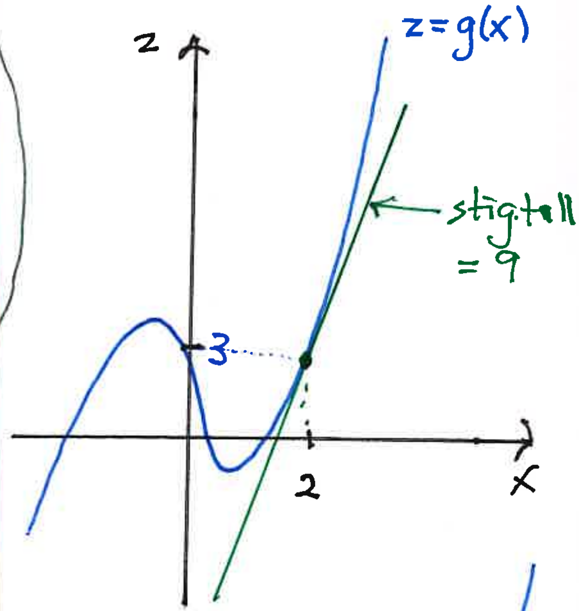
$f'_y = -3x + 3y^2$

Anta $(x,y) = (2,1)$

Da er $f(2,1) = 2^3 - 3\cdot 2\cdot 1 + 1^3 = 3$. Deretter:

$f'_x(2,1) = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 1 = 9$ og

$f'_y(2,1) = -3\cdot 2 + 3\cdot 1^2 = -3$



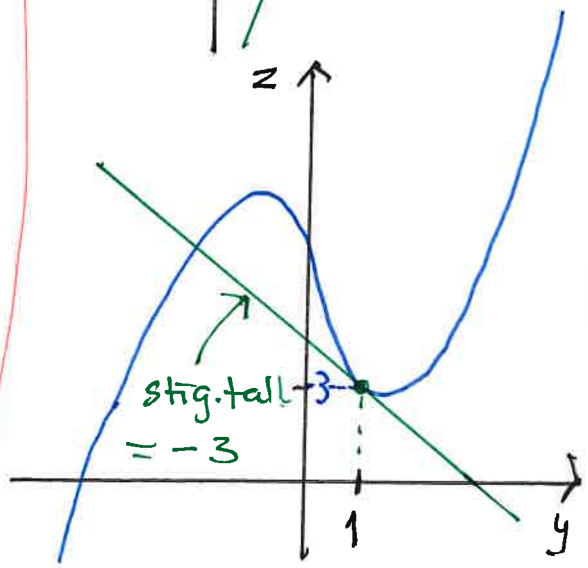
Endring i x-retningen (y=1)

Fra $f(x,y)$ kan vi lage en ny funksjon i én variabel

$g(x) = f(x,1) = x^3 - 3x + 1$

$g'(x) = 3x^2 - 3$ og

$g'(2) = 3\cdot 2^2 - 3 = 9$



Endring i y-retningen (x=2)

Får funksjon i én variabel

$h(y) = f(2,y) = 8 - 6y + y^3$

$h'(y) = -6 + 3y^2$

$h'(1) = -6 + 3\cdot 1^2 = -3$

<u>Definisjon</u> Vi har en funksjon $f(x,y)$ i to variabler. Da er et punkt $(x,y)=(a,b)$ er et <u>stasjonært punkt</u> for f hvis

$$f'_x(a,b) = 0 = f'_y(a,b)$$

Hvordan finner vi stasjonære punkter?
- løser likningssystemet

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

<u>Hessematrisen</u>

<u>Definisjon</u> $f(x,y)$ har hessematrise

$$H(f)(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

<u>Eks</u> $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$f'_x = 3x^2 - 3y$ gir $f''_{xx} = 6x$ og $f''_{xy} = -3$

$f'_y = 3y^2 - 3x$ gir $f''_{yx} = -3$ og $f''_{yy} = 6y$

så $H(f)(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$. Kan sette inn det stasjonære punktet $(x,y)=(1,1)$

$$H(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Start: 10.58

2. Tangenter til nivåkurver

Eks $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$

- Nivåkurven $f(x,y) = c$ er løsningene på denne likningen.
- Nivåkurvene ligger i xy-planet.
- Nivåkurven $f(x,y) = c$ er „skyggen" av the horisontale planet $z = c$ og grafen til f.
- Vi ser på graf.

  – hvorfor får vi at nivåkurvene er sirkler?

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = c$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = c + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = c + 5$$

Hvis $c+5 > 0$
dvs $\underline{c > -5}$
så er nivåkurven en sirkel med
$r = \sqrt{c+5}$ og
sentrum $(1, -2)$

Hvis $c+5 = 0$
dvs $\underline{c = -5}$
da er
$(x,y) = (1,-2)$
eneste punkt på „nivåkurven"
$(r = 0)$

Hvis $c+5 < 0$
dvs $\underline{c < -5}$
så er det ingen nivåkurve
(ingen løsninger på likningen)

Tangentlinjer til nivåkurver

Eks (forts) If $(x, y) = (-2, 2)$ så er $c = 20$
fordi $f(-2, 2) = 20$.

Vil bruke ettpunktsformelen

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

$(x_0, y_0) = (-2, 2)$
og k er stigningstallet

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x + 2)$$

Påstår $k = \frac{3}{4}$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$$

For å finne k bruker vi implisitt derivasjon. Tenker at $y = y(x)$

$$(x^2 - 2x + y^2 + 4y)'_x = (20)'_x$$

$$2x - 2 + 2y \cdot y' + 4y' = 0 \quad \text{og løser for } y'$$

$$(2y + 4)y' = -2x + 2$$

$$y' = \frac{-2x + 2}{2y + 4} = -\frac{2x - 2}{2y + 4}$$

som gir $k = y'\big|_{(-2,2)} = -\frac{2 \cdot (-2) - 2}{2 \cdot 2 + 4} = -\frac{-6}{8} = \frac{3}{4}$ – så ok.

Merk at $y' = -\frac{2x - 2}{2y + 4} = -\frac{f'_x}{f'_y}$

Resultat Hvis $f(x,y) = c$ så er

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0$$

Spesielt: $$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

---

3. Gradienten

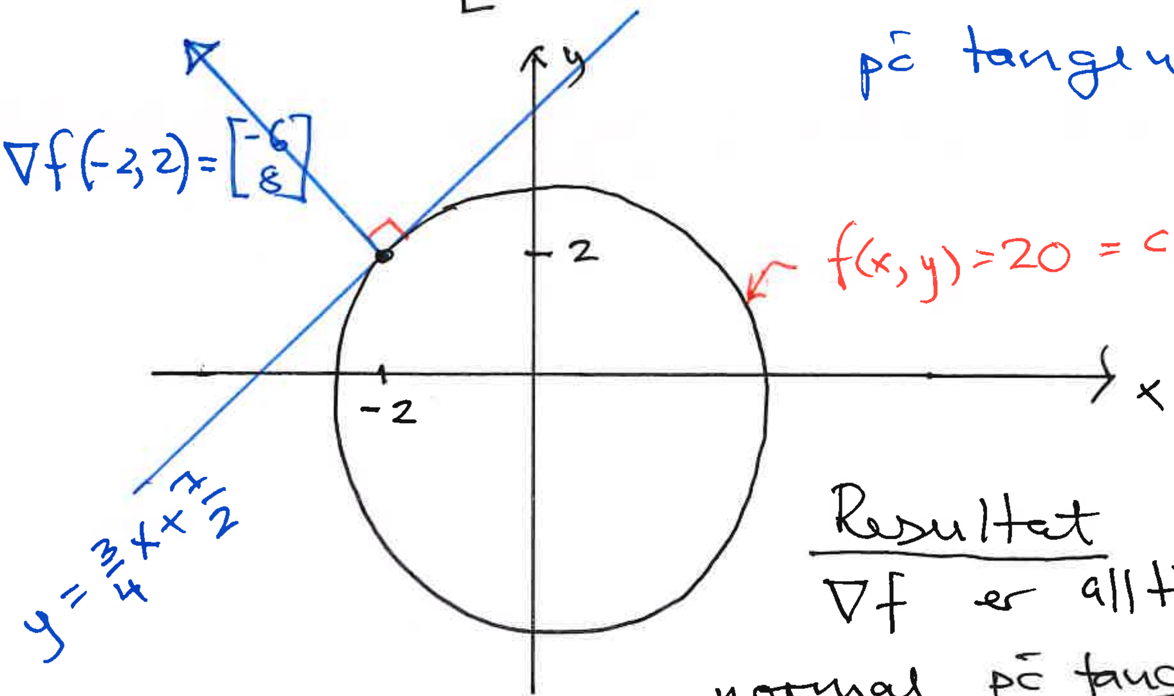
– er $\nabla f = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$ $(= [f'_x, f'_y])$

Eks $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x - 2 \\ 2y + 4 \end{bmatrix}$$

Innsatt $(x,y) = (-2, 2)$ gir

$$\nabla f(-2,2) = \begin{bmatrix} 2\cdot(-2) - 2 \\ 2\cdot 2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}$$ – er normal på tangenten



Resultat
∇f er alltid normal på tangenten og peker i den retningen hvor $f(x,y)$ øker mest.

Retningsderiverte

Eks Hvis $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, da er

$$f'_{\underline{a}} = \underline{a} \cdot \nabla f \overset{\text{f. eks.}}{=} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x-2 \\ 2y+4 \end{bmatrix}$$

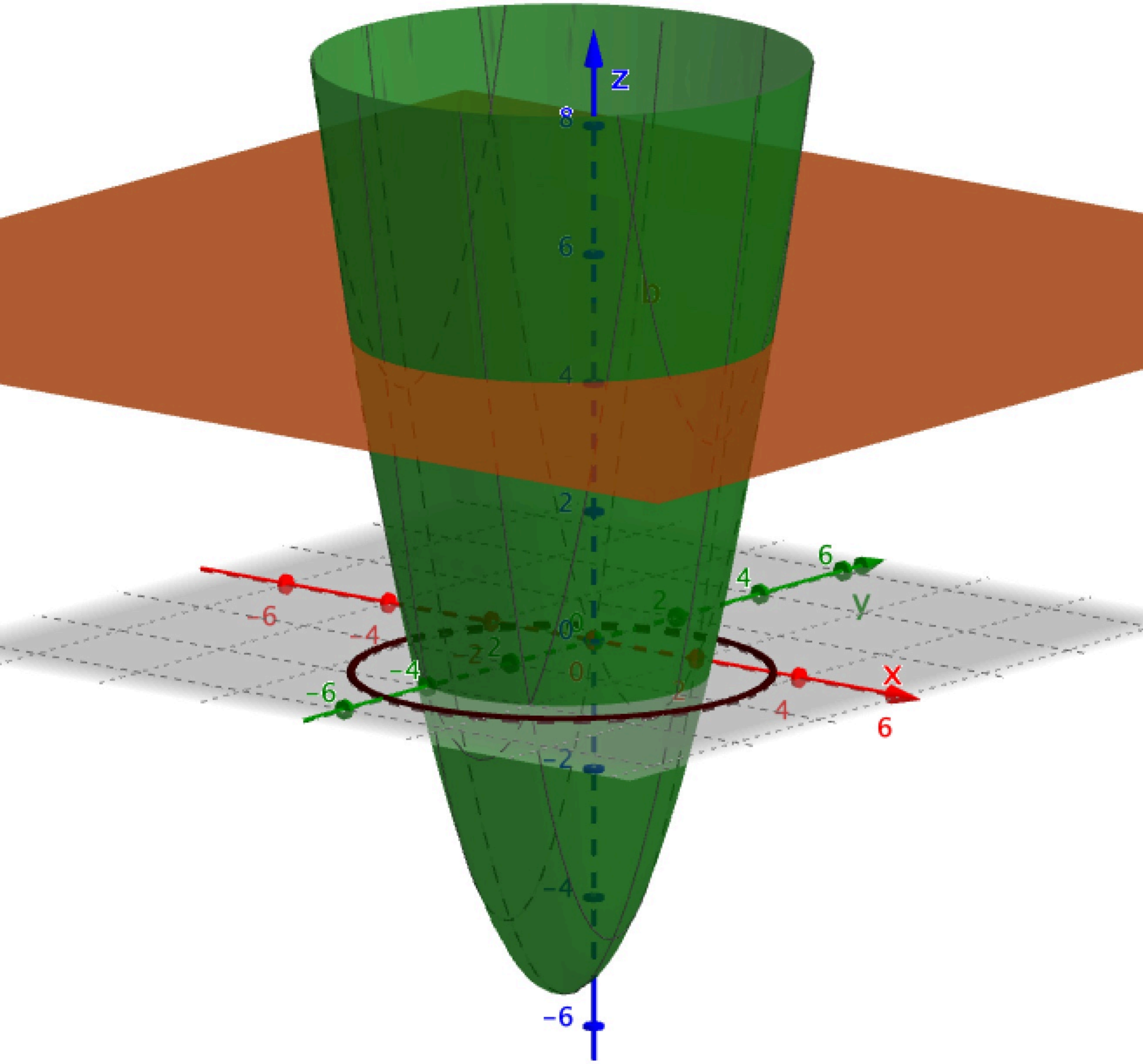
indreprodukt

$$= 2(2x-2) + 1 \cdot (2y+4)$$

$$= 4x - 4 + 2y + 4 = 4x + 2y$$

Kan sette inn for x og y, f. eks.

$$f'_{\underline{a}}(1,1) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6$$


z
8
6
b
4
2
0
−2
−4
−6
x
y
6
4
2
−2
−4
−6