Plan

1. Funksjoner i to variabler
2. Grafer og nivåkurver
3. Lineære funksjoner

Frist fasoppgaven:

Mandag kl 12.00

① Funksjoner i to variabler

Eks:

$f(x,y) = 3x - 2y + 1$ lineær fn.

$f(x,y) = x^3y^2 + x^2 - 2x$ polynom fn. av grad 5

$f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ rational fn.

Generelt: $f(x,y) =$ funksjonsuttrykk

$z = f(x,y)$

(x,y) : input

z : output

Defn: Definisjonsmengden D_f til f består av alle tallpar (x,y) som vi kan sette inn i funksjonen f.

D_f delmengde av $\mathbb{R}^2$ (xy-planet)

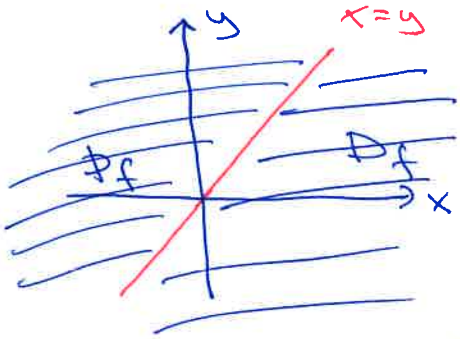
Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \text{ er tall}\}$

D_f : alle tallpar (x,y) i xy-planet

<u>Eks:</u> $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

D_f: $x - y \neq 0$

$D_f = \{(x,y) : x - y \neq 0\}$



<u>Defn:</u> Verdimengden V_f til f består av funksjonsverdier $z = f(x,y)$ som vi kan få ved å bruke funksjonen f på ~~tall~~ par (x,y) i D_f.

<u>Eks:</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D_f = \mathbb{R}^2$ $V_f = [0, \infty)$

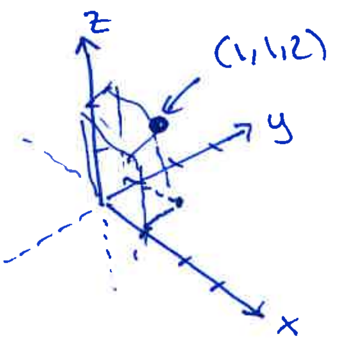
For å finne V_f, må vi finne globale maks/min til f.

(2) Grafer og nivåkurver

<u>Defn:</u> Grafen til f består av alle (x,y,z) slik at (x,y) er i D_f og $z = f(x,y)$.

<u>Kort:</u> $z = f(x,y)$

Vi kan framstille grafen til f i xyz-koordinatsystemet!



<u>Eks:</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$

(x,y)	$(0,0)$	$(1,1)$	...
$z = f(x,y)$	0	2	...

⇓

$(1,1,2)$

Grafen til f er en <u>flate</u>

Nivå kurver:

Horisontalt kutt der vi setter $z = c$, en konstant.

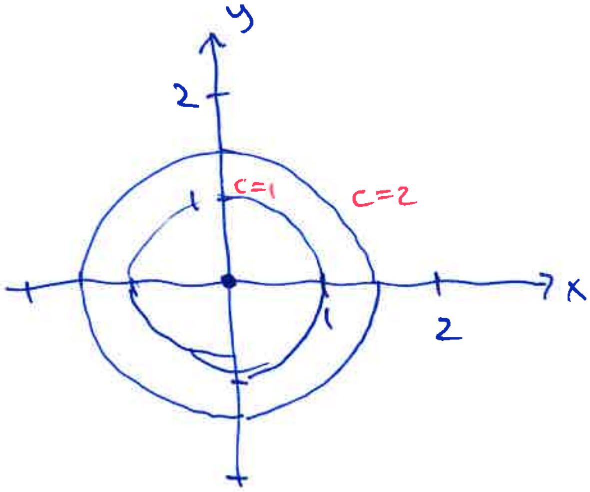
$f(x,y) = c \iff$ alle pkt (x,y) slik at $f(x,y)=c$, dvs alle pkt der grafen har høyde c

Eks: $f(x,y) = x^2+y^2$

$c=2$: $f(x,y) = 2$

$x^2+y^2 = 2$

$x^2+y^2=r^2$ sirkel med $r=\sqrt{2}$ og senter i $(0,0)$

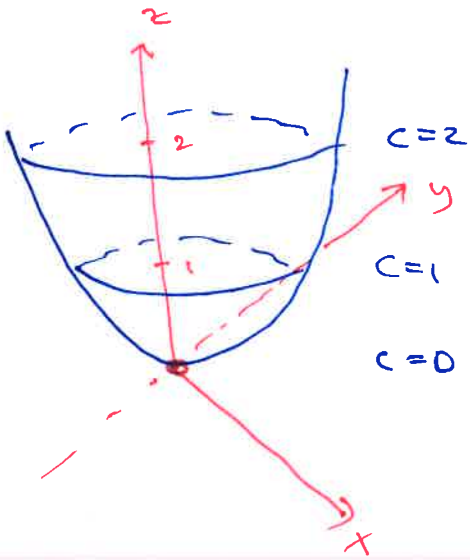


$c=1$: $x^2+y^2=1$ sirkel $r=1$

$c=0$: $x^2+y^2=0$ punkt $(0,0)$

$c=-1$: $x^2+y^2=-1$ ingen pkt

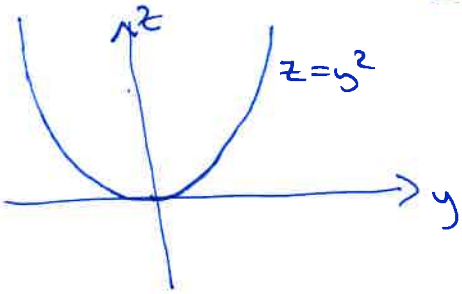
Generelt: $x^2+y^2=c$



Andre kutt:

$x=0$: $z=f(0,y)$

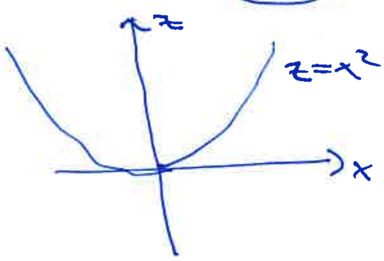
$z = 0^2+y^2$ $\boxed{z=y^2}$



$y=0$:

$z=f(x,0)$

$z=x^2+0^2$ $z=x^2$



③ Lineære funksjoner

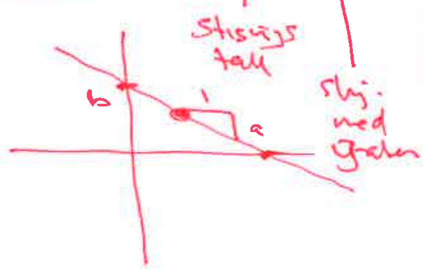
Generelt kalles en fn. lineær hvis den har formen

$$f(x,y) = ax + by + c$$

der a, b, c er gitte tall.

Eks: $f(x,y) = 2x - y + 1$

Husk: $y = ax + b$



Nivåkurver:

$c = 0$: $2x - y + 1 = 0$

$2x + 1 = y$

$y = \underline{2x + 1}$

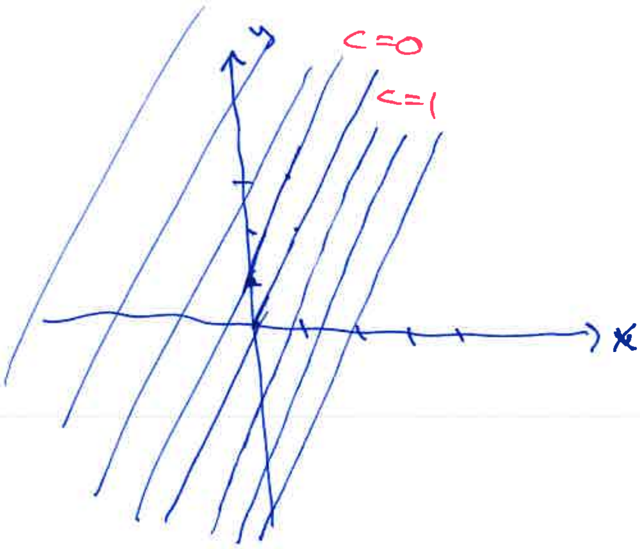
$c = 1$: $2x - y + 1 = 1$

$\underline{y = 2x}$

c: $2x - y + 1 = c$

$2x + 1 - c = y$

$\underline{y = 2x + (1 - c)}$



Generelt:

$f(x,y) = ax + by + c$ er en lineær funksjon $\iff$ grafen til f er et plan (en flate uten krumning)

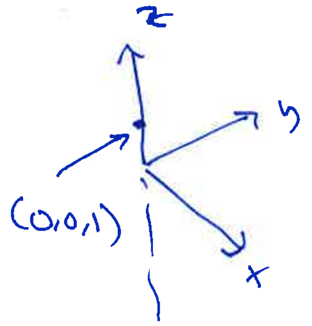
Tolkning av koeffisienten til $f(x,y) = ax + by + c$

1) c = skjæring med z-aksen

Z-aksen: $x = y = 0$

$f(0,0) = a\cdot 0 + b \cdot 0 + c$

$\boxed{z = c}$



2) a, b gir helningen av planet

Indreprodukt / ~~skalarprodukt~~ prikkprodukt av vektorer

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

n-vektorer

Defn:

$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n$

$\left(= \underline{v}^T \underline{w} \text{ som matriser} \right)$

Eks:

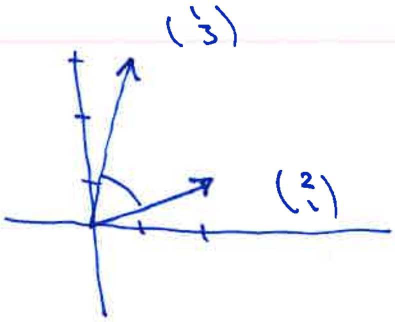
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$

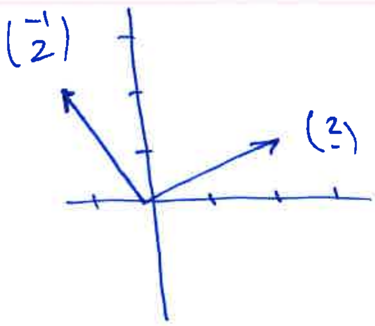
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$

$\underline{v} \cdot \underline{w} > 0 \iff$ spiss vinkel ($< 90°$)

$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \iff \underline{v} \perp \underline{w}$ ($= 90°$)

$\underline{v} \cdot \underline{w} < 0 \iff$ vinkel $> 90°$





Eks: Hvilke vektorer står vinkelrett på $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

$\underline{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \iff \underline{v} \perp \underline{w}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$2x - y - z = 0 \qquad \left(2 \quad -1 \quad -1 \mid 0 \right)$$

frie var.

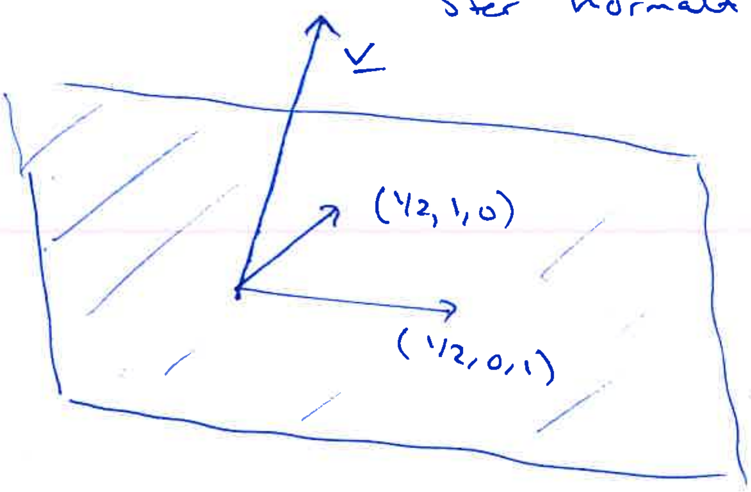
$$2x = y + z$$

$$x = \underline{\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z}, \quad y, z \text{ fri}$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Konklusjon: Vektorene $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ og alle lin. komb. av disse står normalt på $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



$\underline{v}$ kalles normalvektoren til planet

$f(x,y) = ax+by+c$

et plan

i) $z=c$ er skj. med z-aksen

ii) $\underline{n} = (a,b,-1)$ er normalvektoren til planet

$z = ax+by$ (plan med $c=0$)

$0 = ax+by-z$

$$0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\underline{n}$ normalvektoren til planet

Eks: $f(x,y) = 2x-y+1$

$z = 2x-y+1$

Grafen til f er et plan, skjæringen med z-aksen er i $z=1$, og normalvektoren til planet er $\underline{n} = (\underset{a}{2}, \underset{b}{-1}, -1)$