## Plan

1. Oppsummering: Matriser, vektorer og lineære systemer
2. Gjennomgang: Eksamen 05/2019 Oppgave 1, 05/2017 Oppgave 1

Veiledning:
~~D3-037~~ D3-080
D3-019

### (1) Oppsummering: Matriser, vektorer og lineære system

**Lineære system** $(m \times n)$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$(A|\underline{b})$ utvidet matrise

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ matriseform

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

koeffisientmatrisen
$m \times n$-matrise

**Metoder:** (1) Gauss-eliminasjon $(A|\underline{b}) \to \dots \to$ trappeform

(2) Determinant:

$m = n$:
- $|A| = 0$: ingen løsn. eller uendelig mange løsn
- $|A| \neq 0$: én entydig løsning → Kramers regel, $A^{-1}$

Spesielt nyttig når det lineære sys. har parametre

* Kramers regel: $x_i = \dfrac{|A_i(\underline{b})|}{|A|}$

hvor $A_i(\underline{b})$ er matrisen vi får ved å bytte ut i'te kolonne i $A$ med $\underline{b}$

* $A^{-1}$: $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \boxed{\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}}$

Vektorer: $\underline{w}$ er en lineær-kombinasjon av $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n}$ $\Leftrightarrow$ vektorlikningen

$$x_1 \underline{v_1} + x_2 \underline{v_2} + \ldots + x_n \underline{v_n} = \underline{w}$$

har løsninger $\Updownarrow$

lineært system:

$$\left( \underline{v_1} \middle| \underline{v_2} \middle| \ldots \middle| \underline{v_n} \right) \cdot \underline{x} = \underline{w}$$

Matriser:

- elementære rad-operasjoner (Gauss)
- regne ut determinanter
  - kofaktorutvidelse
  - elementære radoperasjoner (Gauss)

    determinant av trappeform = produktet av elementene på diagonalen
- regne ut matrisemultiplikasjon
- regne ut inverse matriser

$|A| \neq 0$: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj}(A)$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$

$|A| = 0$: A ikke invertibel ($A^{-1}$ finnes ikke)

Alt metode: Gauss (se neste side)

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I$$

Noen nyttige formler:

Husk: $AB \neq BA$

① $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

② $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$|A A^{-1}| = |I| = 1$

$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = 1/|A|$

③ $|rA| = r^n \cdot |A|$ (når A er $n \times n$-matrise)

④ $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

⑤ $(AB)^T = B^T A^T$

Alt. metode for å finne $A^{-1}$:

$\underset{n\times n}{A}$ : $(A|I) \to \dots \to (B|C)$

redusert trappeform
= trappeform slik at
① alle pivoter = 1
② alle element over en pivot = 0

Hvis $B = I$ : $A^{-1} = C$
$B \neq I$ : A ikke invertibel

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-4} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -4 & 1 \end{array}\right) \quad : -15$$

trappeform

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/15 & -1/15 \end{array}\right) \xrightarrow{-4} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 4/15 & -1/15 \end{array}\right)$$

$A^{-1}$

I redusert trappeform

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Oppgaverk 24, Opps. 9:

$A \to B$ kan realiseres $B = E \cdot A$

elementær radoperasjon

E: elementær matrise

$$\begin{pmatrix} 1\cdot a_1 + 0\cdot a_2 + 0\cdot a_3 \\ 0\cdot a_1 + 0\cdot a_2 + 1\cdot a_3 \\ 0\cdot a_1 + 1\cdot a_2 + 0\cdot a_3 \end{pmatrix}$$

//

a) $A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ - & - & - \\ - & - & \cdot \end{pmatrix} \updownarrow \to B$

$$\underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} \text{—— } a_1 \text{ ——} \\ \text{—— } a_2 \text{ ——} \\ \text{—— } a_3 \text{ ——} \end{pmatrix} \cdot 2$ $\qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \cdot a_1 \\ 2 \cdot a_1 + a_2 \\ 1 \cdot a_3 \end{pmatrix} = B$

## Forklaring av alternativ metode:

$$(A \mid I) \to \to \cdots \to (B \mid C)$$

redusert trappeform

Hvis $B = I$, så er $A^{-1} = C$
Hvis $B \neq I$, så fins ikke $A^{-1}$

$$E_r \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot (A \mid I) = (B \mid C)$$

$$\Updownarrow$$

$$E_r \cdots E_2 E_1 A = B = I$$
$$E_r \cdots E_2 E_1 I = C$$

$$\overbrace{(E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1)}^{= A^{-1}} \cdot A = I$$

$$C = E_r E_{r-1} \cdots E_2 \cdot E_1 = A^{-1}$$

② Eksamen 05/2017, Opps. I

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 1-a \\ 2 & 1+a & 2 \\ 1-a & 2 & 1+a \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3+a \\ a^2 \\ 3-a \end{pmatrix}$

a) $a=1$: Løs vha Gauss

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2x+2y &= 4 \\ 2y+2z &= 2 \\ 2z &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x &= -1 & x &= -1/2 \\ 2y &= 5 & y &= 5/2 \\ z &= -3/2 \end{aligned}$$

trappeform

Konkl: $(x,y,z) = (-1/2, 5/2, -3/2)$ én løsning

b) $a=1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A| = 2\cdot 0 - 2\cdot 4 = -8 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{x} = A^{-1}\cdot \underline{b}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 1-a \\ 2 & 1+a & 2 \\ 1-a & 2 & 1+a \end{pmatrix}$

Fra teori:

$\left.\begin{array}{l} A\underline{x}=\underline{b} \\ \text{har én} \\ \text{entydig} \\ \text{løsning} \end{array}\right\} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 1-a \\ 2 & 1+a & 2 \\ 1-a & 2 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{array}{l} -2\cdot\left(2(1+a)-2(1-a)\right) \\ +(1+a)\cdot\left((1+a)^2-(1-a)^2\right) \\ -2\cdot\left(2\cdot(1+a)-2(1-a)\right) \end{array}$$

$$= (1+a)\cdot\left((\cancel{1}+2a+\cancel{a^2})-(\cancel{1}-2a+\cancel{a^2})\right) - 2\cdot 2(\cancel{2}+2a-\cancel{2}+2a)$$

$$= 4a(1+a) - 4a\cdot 4 = 4a(1+a-4) = \underline{4a(a-3)}$$

$|A|=0: \quad a=0, \ a=3$

$|A|\neq 0: \quad a\neq 0, a\neq 3$

Konkl:

En entydig løsn. når $\underline{\underline{a\neq 0, a\neq 3}}$

d) Bestem $a$ slik at $A\underline{x}=\underline{b}$ har ingen løsninger

$|A|=0: a=0, \ a=3$ ⟵ ingen eller uend. mange løsn.

$\underline{a=0}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \\ -1 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

uend. mange løsn.

$\underline{a=3}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) -1$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$ ingen løsn.

Konkl.: Ingen løsn. $\Leftrightarrow \underline{\underline{a=3}}$