Plan

1 Matrisemultiplikasjon og lineære systemer
2 Regning med matriser
3 Inverse matriser

Husk: Fagoppgave 14/03 – 21/03

(1) Matrisemultiplikasjon:

Defn: A, B matriser slik at # kolonner i A = # rader i B → $A \cdot B$ matrisemultiplikasjon

produktet har # rader = # rader i A, # kol. = # kol. i B

$C = AB = (c_{ij})$ med $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

Eks:

$$\underset{2\times 2}{\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}} \cdot \underset{2\times 1}{\overset{B}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$

$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2$

Merk: $A \cdot B \neq BA$

Eks: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$ ikke defn.

Lineære system:

Ex:

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 4 \\ x-y+2w &= 7 \\ 2x+3y-z &= 10 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

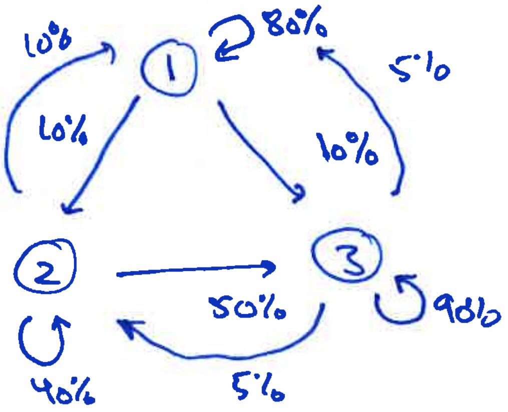
koeff. matrisen

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z + 1\cdot w \\ 1\cdot x - 1\cdot y + 2\cdot w \\ 2\cdot x + 3\cdot y - 1\cdot z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \underline{b} \quad \Longrightarrow \quad A\cdot\underline{x} = \underline{b}$$

matriseformen til det lineære systemet

Ex: Nettverk



Start: $\begin{pmatrix} 40\% \\ 30\% \\ 30\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.30 \\ 0.30 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.80 & 0.10 & 0.05 \\ 0.10 & 0.40 & 0.05 \\ 0.10 & 0.50 & 0.90 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.30 \\ 0.30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.80\cdot 0.40 + 0.10\cdot 0.30 + 0.05\cdot 0.30 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.32 + 0.03 + 0.015 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.365 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

② Matrisealgebra : Regning med matriser

Operasjoner:

i) Addisjon, subtraksjon: $A+B$, $A-B$

ii) Skalarmultiplikasjon: $c \cdot A$ (c et tall)

iii) Matrisemultiplikasjon: $A \cdot B$

iv) Potenser: A^n definert når A er kvadratisk og $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ikke definert

$$\boxed{\text{Defn:} \quad A^2 = A \cdot A \qquad A^1 = A \qquad A^0 = I \qquad A^3 = A \cdot A \cdot A \quad \vdots}$$

Identitetsmatrisen: En matrise I slik at $\boxed{\begin{matrix} A \cdot I = A \\ I \cdot A = A \end{matrix}}$ for alle matriser A.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Identitetsmatriser er $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ for 2x2

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ " 3x3

Den transponerte matrisen

Defn: $A \rightsquigarrow A^T$

A: $m \times n$-matrise; A^T: $n \times m$-matrise

kolonner i A^T = rader i A
rader i A^T = kolonner i A

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Defn: A er symmetrisk hvis $A^T = A$.

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = A$

Determinant: $A \longrightarrow \det(A) = |A|$

A: $n \times n$ matrise

Regneregler for matriser

$A + B = B + A$

$A \cdot (B + C) = AB + AC$

$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$

$\vdots$

$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$ (*)

$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B)$

$= A^2 + AB + BA + B^2$

$\neq A^2 + 2AB + B^2$

Determinant:

i) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ (*)

ii) $|c \cdot A| = c^n \cdot |A|$ $\quad$ A $n \times n$-matrise

iii) $|A^T| = |A|$

Transponering:

i) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ (*)

ii) $(A^T)^T = A$

③ Den inverse matrisen

Defn: A $n\times n$-matrise. En invers matrise A^{-1} for A er en matrise slik at

$$A \cdot A^{-1} = I$$
og
$$A^{-1} \cdot A = I$$

x: tall med $x \neq 0$

$x^{-1} = \frac{1}{x}$: $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

$|A| = 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 3 \neq 0$

Tilfellet $n=2$:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

Huis $|A| = ad - bc \neq 0$, så er $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Huis $|A| = ad - bc = 0$, så finnes ingen invers

Altså: A er invertibel (A^{-1} fins) huis og bare huis $|A| \neq 0$, og isåfall er

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eks:

$2x + y = 3$
$x + 2y = 4$

$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad | A^{-1}\cdot$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} \cdot A\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$I \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Det generelle tilfellet

A $n\times n$-matrise

i) A er invertibel (A^{-1} fins) hvis og bare hvis $|A| \neq 0$.

ii) I så fall er A^{-1} entydig, gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

$\uparrow$ den adjungerte matrisen til A

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = +1 \cdot 6 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 2 \neq 0$$

$C_{11} = +6 \quad C_{12} = -5 \quad C_{13} = +1$

$C_{21} = -6 \quad C_{22} = +8 \quad C_{23} = -2$

$C_{31} = +2 \quad C_{32} = -3 \quad C_{33} = +1$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$