Plan

1. Determinanter og lineære systemer
2. Lineære systemer med parametre
3. Vektor- og matriselikninger

① Determinanter og lineære system

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (-1-1) + \left(-1 \left(\underbrace{1\cdot(-1) - 1\cdot 1}_{-2}\right)\right) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$$

Alternativ metode: Gauss
for å finne determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ ]\cdot(-1) \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ ]\cdot(-1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = E$$

trappeform

Merk:
① $|E| = 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = \underline{4}$
② $|A| = |E| = \underline{\underline{4}}$

Defn: En kvadratisk matrise er <u>øvre triangulær</u> hvis alle elementer under diagonalen er null.

Generelt: – Determinanten til en øvre triangulær matrise er produktet av elementene på diagonalen.
– En <u>trappeform</u> er alltid øvre triangulær.

første tall på diagonalen ... andre tall på diag

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(+1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = \underline{\underline{4}}$$

<u>Resultat:</u> Hvis $A \to B$ er en elementær radoperasjon,

i) bytte om to rader: $|B| = -|A|$

ii) multiplisere en rad med $c \neq 0$: $|B| = c \cdot |A|$

iii) legge til et multippel av en rad til en annen rad: $|B| = |A|$

<u>Lineære systemer</u> og <u>determinanter</u>

<u>Eks:</u>

$$x + y + z = 3$$
$$x + 2y + 4z = 7$$
$$x + 3y + 9z = 13$$

3×3 lineært system

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

koeff. matrisen

$|A| = +1 \cdot 6 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1$
$= 2 \neq 0$

Det lineære systemet på <u>matriseform</u>: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$(A \mid \underline{b})$ utvidede matrise

kvadratisk lineært system (# likninger = # ukjente) $\leadsto$ A er en kvadratisk matrise $\Rightarrow$ Vi kan regne ut $|A|$.

For et $n \times n$ lineært system med koeffisient matrise A, har vi:

- $|A| = 0$: det lineære systemet har <u>ingen</u> eller <u>uendelig mange</u> løsn.
- $|A| \neq 0$: det lineære systemet har <u>én</u> <u>entydig</u> <u>løsning</u>

Eks: $x+y+z=3$
$x+2y+4z=7$
$2x+3y+5z=11$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - 1(-3) + 1\cdot(-1) = -2+3-1 = \underline{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ingen løsn.

$A\underline{x} = b$
$n\times n$ lineært system:
- $|A| \neq 0$: én entydig løsn.
- $|A| = 0$: ingen løsn. eller uendelig mange løsn

2 Lineære system med parametre

Eks: $\boxed{\begin{matrix} x+y=4 \\ x+ay=6 \end{matrix}}$

x, y: variabler (vi løser for disse)
a: parameter (løsn. avhenger av a)

Alt I: Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & a & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & a-1 & 2 \end{array}\right)$$

$a \neq 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & a-1 & 2 \end{array}\right)$ én løsn.

$a = 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ ingen løsn.

$\underline{a \neq 1}$: $x+y=4$
$(a-1)y = 2$

$$x = 4-y = 4 - \frac{2}{a-1} = \frac{4(a-1)-2}{a-1} = \underline{\frac{4a-6}{a-1}}$$

$$y = \underline{\frac{2}{a-1}}$$

$\Downarrow$

$$\underline{(x,y) = \left(\frac{4a-6}{a-1}, \frac{2}{a-1}\right)}, \quad a \neq 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} x+y &= 4 \\ x+ay &= 6 \end{aligned}}$$

Alt 2: Determinanter

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} : \quad |A| = 1\cdot a - 1\cdot 1 = \underline{a-1}$$

i) $\underline{|A|=0}$: $a-1=0$ $\quad \underline{a=1}$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix}\right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right) \quad \underline{\text{ingen løsn.}}$$

ii) $\underline{|A| \neq 0}$: $a-1 \neq 0$ $\quad \underline{a \neq 1}$ $\quad$ én løsn.

Kramer's regel: $\longrightarrow$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}}$$

$$x = \underline{\underline{\frac{4a-6}{a-1}}} \qquad y = \underline{\underline{\frac{2}{a-1}}}$$

Kramer's regel:

Hvis $A\underline{x} = \underline{b}$ er et $n\times n$ lineært system med $|A| \neq 0$, så er løsningen gitt ved formlene

$$x_1 = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_n(\underline{b})|}{|A|}$$

hvor $A_i(\underline{b})$ er matrisen vi får når vi bytter ut kolonne #i i A med vektoren $\underline{b}$.

Generell metode for å løse et $n\times n$ lineært system m/parametre

i) Regn ut $|A|$, og dele opp i tilfellene $\underline{|A|=0}$ og $\underline{|A|\neq 0}$

ii) Tilfellene med $|A|=0$: Bruker Gauss-eliminasjon i hvert av disse tilfellene.

iii) Tilfellene med $|A| \neq 0$: Entydig løsn, bruk Kramer's regel.

Ex:
$$\begin{aligned} rx + 2y - z &= 3 \\ x + (r+1)y - z &= 3 \\ -x - 2y + rz &= 1-r \end{aligned}$$

x, y, z: variables
r: parameter

3x3 lin. sys

$$|A| = \begin{vmatrix} r & 2 & -1 \\ 1 & r+1 & -1 \\ -1 & -2 & r \end{vmatrix} = r\big((r+1)r - 2\big) - 2(r-1) - 1\big(-2 - (r+1)(-1)\big)$$
$$= r(r^2+r-2) - 2r + 2 + 2 - r - 1$$
$$= r(r+2)(r-1) - 3r + 3$$
$$= r(r+2)(r-1) - 3(r-1)$$
$$= (r-1)\cdot[r(r+2) - 3]$$
$$= (r-1)(r^2+2r-3)$$
$$= (r-1)(r-1)(r+3) = (r-1)^2(r+3)$$

a) $|A| = 0$: $(r-1)^2(r+3) = 0$
$r = 1$, $r = -3$

$r=1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ +1 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

no solutions for $r=1$

$r=-3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & 12 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \end{array}\right) -1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$

no solutions for $r=-3$

(b) $|A| \neq 0$: $(r-1)^2(r+3) \neq 0$

$r \neq 1, -3$ $\rightarrow$ a unique solution

Kramer's rule:

$|A| = (r-1)^2(r+3)$

$$|A_1(\underline{b})| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & r+1 & -1 \\ 1-r & -2 & r \end{vmatrix} = 3\left(r(r+1)-2\right) - 2\left(3r+1-r\right) - 1\left(-6-(r+1)(1-r)\right)$$

$$= 3(r^2+r-2) - 2(2r+1) - 1(r^2-7) = 2r^2-r-1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2r^2-r-1}{(r-1)^2(r+3)} = \frac{\cancel{(r-1)}(2r+1)}{(r-1)^{\cancel{2}}(r+3)} = \frac{2r+1}{(r-1)(r+3)}, \quad r \neq 1, -3$$

Similar computations to find y, z when $r \neq 1, -3$.

③ Vektor-likninger

Eks: $x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\0\\4x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3y\\-y\\2y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4z\\-z\\6z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x + 3y + 4z\\ -y - z\\ 4x + 2y + 6z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x+3y+4z &= 3\\ -y-z &= 1\\ 4x+2y+6z &= 2\end{aligned}$$

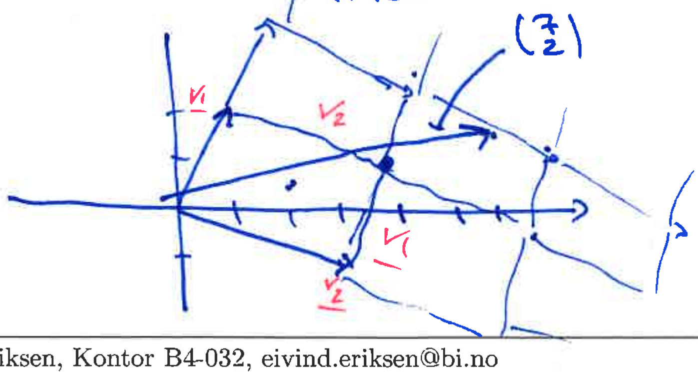
Gauss: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 6 & 2\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ -4\end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -10 & -10 & -10\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ -10\end{matrix}$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -20\end{array}\right)$ ingen løsn.

Eks: Er $\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ en lineærkombinasjon av $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$?

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \underline{v_1}$, $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \underline{v_2}$

Dvs: $\underbrace{x\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}}_{\text{lineærkomb. av } \underline{v_1}, \underline{v_2}.} = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} =$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \cdot (-2) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -7 & -12 \end{array}\right)$$

$$x + 3y = 7$$
$$-7y = -12$$

$$y = \frac{-12}{-7} = \frac{12}{7} \simeq \underline{1.7}$$

$$x = 7 - 3 \cdot \frac{12}{7} = \frac{13}{7} \simeq \underline{1.8}$$