Plan

1 Lineære system: Antall løsninger
2 Regning med matriser og vektorer
3 Determinanter

(1) Lineære system: Antall løsninger

Eks:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \qquad + 2x_5 = 11$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 45$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 11 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 4 & 45 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ -3 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right) \; -1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

trappeform

Defn: Pivot-posisjon = de posisjonene i matrisen hvor vi har en pivot i trappeform

$$\boxed{\text{Pivot-posisjonen bestemmer antall løsninger}}$$

i) Pivot-posisjon i siste kolonne: Ingen løsn

ii) Ingen pivot-posisjon i siste kolonne: det er løsn.

(a) Pivotposisjon i alle variabelkolonner: én løsning (entydig)

(b) Minst én variabel-kolonne uten pivot: uendelig mange løsn.

I Eks: x_3, x_4, x_5 fri, kan løse for x_1, x_2 } tre frihetsgrader

Generelt:

- kan alltid finne en trappeform vha elem. radoperasjoner
- en trappeform er ikke entydig, men pivot-posisjonene er entydige

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/
Handelshøyskolen BI
Siviløkonomstudiet

Teorem: Ethvert lineært system har enten

i) ingen løsninger } inkonsistent

ii) én entydig løsning
iii) uendelig mange løsninger } konsistent

(2) Regning med matriser og vektorer

Defn: En *m×n-matrise* er en rektangel tabell av tall med m rader og n kolonner.

Eks:

rad 1, kol. 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

stor bokstav

2×3-matrise

Operasjoner:

- Addisjon : $A + B$
- Subtraksjon : $A - B$

} definert når A, B har samme størrelse.

- **Skalarmultiplikasjon:** $r \cdot A = A \cdot r$ — r tall (skalar), A matrise

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Defn: En n-vektor er en n×1-matrise (matrise med én kolonne, kolonnevektor)

Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 2-vektor $\qquad \underline{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 3-vektor

Skrivemåte: $\underline{v}$, boldface $\mathbf{v}$, $\vec{v}$

Operasjoner: addisjon, subtraksjon, skalarmultiplikasjon: som for matriser

Eks:

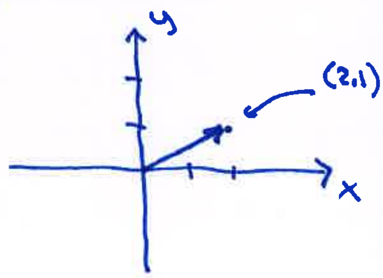
$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \qquad 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad -1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$$

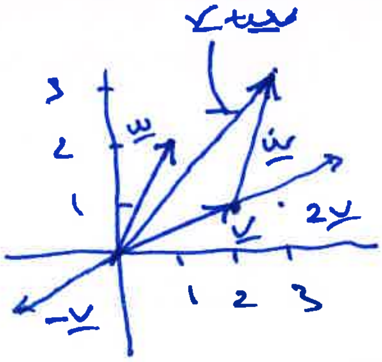
Alternativ defn: En vektor er noe med størrelse og retning

Geometrisk tolkning:

Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}$



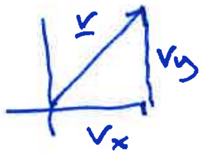
$$\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{\underline{v}} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\underline{w}} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$



$$2\underline{v} = 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$-\underline{v} = -1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \approx 2.23$$



Vektor — størrelse: lengden; retning: vinkel, stigningstall

$\underline{v} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}$ har lengde $\|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2+v_y^2}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$ n-vektor $\qquad \|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2}$

③ Determinanter:

$A \rightsquigarrow \det(A) = |A|$

$n \times n$-matrise (kvadratisk) — determinant, et tall

n=2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = \underline{\underline{3}}$

$$\boxed{\text{Generelt:} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

n>2:

Eks: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$

$= 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \cdot 1$

$= 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = \underline{\underline{2}}$

(metode som kun fungerer med 3×3-matriser)

Metode: Kofaktor utvikling (generell metode for alle determinanter)

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$$

$$= 1 \cdot (+1) \cdot M_{11} + 1 \cdot (-1) \cdot M_{12} + 1 \cdot (+1) \cdot M_{13}$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= +1\,(2 \cdot 9 - 3 \cdot 4) - 1\,(1 \cdot 9 - 1 \cdot 4) + 1 \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot 2)$$

$$= 6 - 5 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Kofaktorutvikling langs første rad

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Kofaktorer:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Minor:

M_{ij} = determinanten til undermatrisen vi får ved å slette rad i, kolonne j.

Merk: – kofaktorutvikling langs en valgfri rad eller kolonne gir alltid determinanten.

Eks:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array}$$
$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix}-1&1&-1\\2&4&8\\3&9&27\end{vmatrix} -1\cdot\begin{vmatrix}*\end{vmatrix} +1\cdot\begin{vmatrix}*\end{vmatrix} -1\cdot\begin{vmatrix}*\end{vmatrix}$$

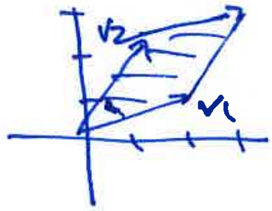
$$= +1\Big(+(-1)(4\cdot 27-8\cdot 9)-1(2\cdot 27-8\cdot 3)+(-1)\cdot(2\cdot 9-3\cdot 4)\Big)$$
$$-1\cdot(\;--\;)+1\cdot(\;--\;)-1\cdot(\;---\;)$$

Generelt: $n\times n$-determinant : $n!$ ledd av grad n

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

Tolkning:

$n=2$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, med kolonner v_1 og v_2



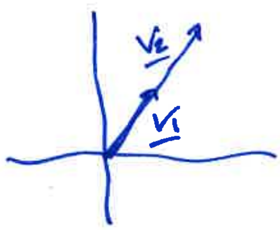
parallellogramet utspent av v_1, v_2

$$\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix} = \underline{\underline{3}} \longleftarrow \pm \text{ arealet av parallellogramet}$$

$$\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix} = 1-4 = \underline{\underline{-3}}$$

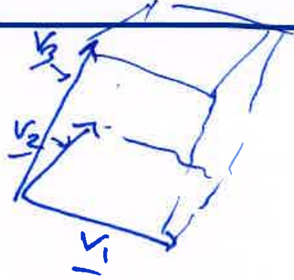
~~Areal~~ $|A| = 0 \iff$ kolonnevektorene v_1, v_2 er slik at en er et skalarmultippel av den andre

Eks: $\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix} = 0$



$n=3$: $A = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3)$

tre 3-vektorer



$|A| = \pm$ volumet av parallellepiped utspent av $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$