MET 1181, 2. forelesning, 2. sept. 2021, Runar Ile

Plan
1. Relativ endring og vekstfaktor
2. Potenser
3. Renter
4. Nåverdi av betalingsstrøm

1. Relativ endring og vekstfaktor

$$\text{Relativ endring} = \frac{\text{ny verdi} - \text{gammel verdi}}{\text{gammel verdi}}$$

Husk: $\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$ så $3\% = 3 \cdot \frac{1}{100} = \frac{3}{100} = 0{,}03$

Eks Kåres timelønn har økt fra 163 kr til 181 kr
Da er den relative endringen

$$\frac{181\,\text{kr} - 163\,\text{kr}}{163\,\text{kr}} = 0{,}110 = 11{,}0\,\%$$

Vekstfaktor = 1 + relativ endring

Eks Vekstfaktoren til Kåres timelønnsøkning
er $1 + 0{,}110 = 1{,}110$

Oppgave I fjor tjente Kåre 54 000 (m. 163/time)
Hva vil han tjene i år hvis han jobber
like mye og timelønnen er 181/time.

Løsning $54000 \cdot 1{,}11 = \underline{\underline{59\,940}}$

2. Potenser

$$1{,}11^3 = 1{,}11 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}11$$

$$1{,}11^{-3} = \frac{1}{1{,}11^3}$$

$$1{,}11^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1{,}11^2}$$

Generelt for heltall m, n med $n > 0$ og alle pos. tall $a \geq 0$ er

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{definisjon}}{=} \sqrt[n]{a^m}$$

<u>Oppgave</u> Beregn $1{,}11^{\sqrt{2}}$ på kalkulatoren (svar: 1,159035....)

<u>Løsning</u> $1{,}11$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{=}$

$$2 + 3 \cdot 4 = 14$$

Samme grunntall $\quad 2^{1{,}5} \cdot 2^{3{,}8} = 2^{1{,}5+3{,}8} = 2^{5{,}3}$

Samme eksponent $\quad 2^4 \cdot 3^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$$

$$= (2 \cdot 3)^4 = 6^4$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

<u>Mønster</u> $\quad a^r \cdot b^r = (ab)^r$

Oppgave Beregn $1{,}12^{-1}$ på kalkulatoren.

Løsning 1 1,12 $\boxed{y^x}$ 1 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$

Løsning 2 1,12 $\boxed{1/x}$

---

3. Renter

Eks Du setter 40000 på en konto som gir 2,3 % årlig rente. Rentene kapitaliseres (legges til kapitalen) hvert år, etterskuddsvis.

Etter ett år er balansen (hva som står på kontoen) gitt som

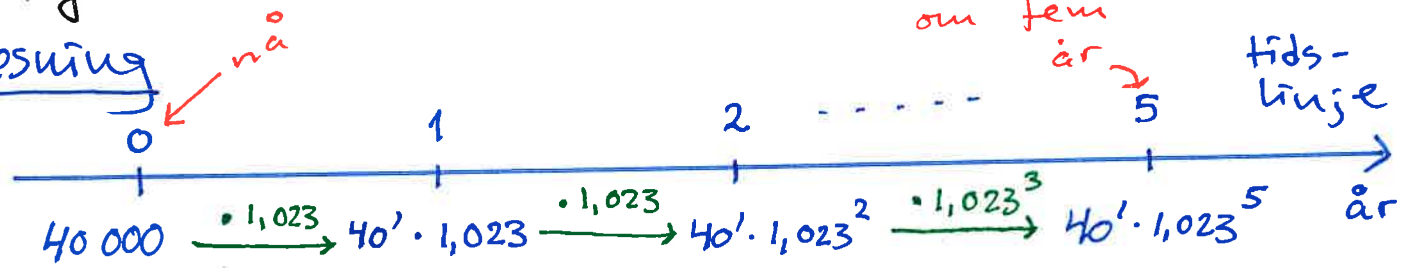
$$40000 + 40\,000 \cdot 2{,}3\,\%$$

$$= 40\,000 \cdot (\underbrace{1 + 2{,}3\%}_{\text{vekstfaktor}}) = 40\,000 \cdot 1{,}023$$

$$= \underline{\underline{40\,920{,}00}}$$

Oppgave Hva er balansen etter 5 år?

Løsning



Svar: $40\,000 \cdot 1{,}023^5 = \underline{\underline{44\,816{,}52}}$

Pausespørsmål: Hvordan regne ut $\sqrt[3]{2}$ på kalk?

Svar 2 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$

Svar: 1,259921050

Start: 9.00

EKS Hvis rentene kapitaliseres kvartalsvis er vekstfaktoren for ett kvartal

$$1 + \frac{2{,}3\,\%}{4} = 1 + 0{,}00575 = 1{,}00575$$

Balansen etter ett år: $40\,000 \cdot 1{,}00575^{4}$

Balansen etter 5 år: $40\,000 \cdot 1{,}00575^{5\cdot 4}$

Vi sier at 2,3 % er den nominelle (års)renten

Årlig vekstfaktor er $1{,}00575^{4} = 1{,}023199$

Den effektive renten er 2,3199 %

Mønster

nominell rente

antall terminer totalt

$$B = B_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{m}$$

balansen etter m terminer

innskudd

ant. rentetermer pr. år

$$\text{Effektiv rente} \quad r_{eff} = \underbrace{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n}}_{\text{vekstfaktor for ett år}} - 1$$

4. Nåverdi til kontantstrøm

La K_0 være en investering/innskudd/betaling i dag. <u>Fremtidsverdien</u> K_n av K_0 om n år (eller terminer) med (termin)rente r er

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

<u>Omvendt</u>: Anta K_n skal betales om n år. Da er <u>nåverdien</u> K_0 av K_n gitt som

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

<u>Oppgave</u> Bestem nåverdien til 30 mill. utbetalt om 5 år med 8% rente

<u>Løsning</u> $K_0 = \dfrac{30 \text{ mill}}{1{,}08^5} = 20{,}42 \text{ mill}$

„Hvor mye må du sette i banken i dag for å ha 30 mill om 5 år hvis renten er 8%?" Svar

Kontantstrøm

Eks Du betaler 20 mill i dag og får tilbake betalt

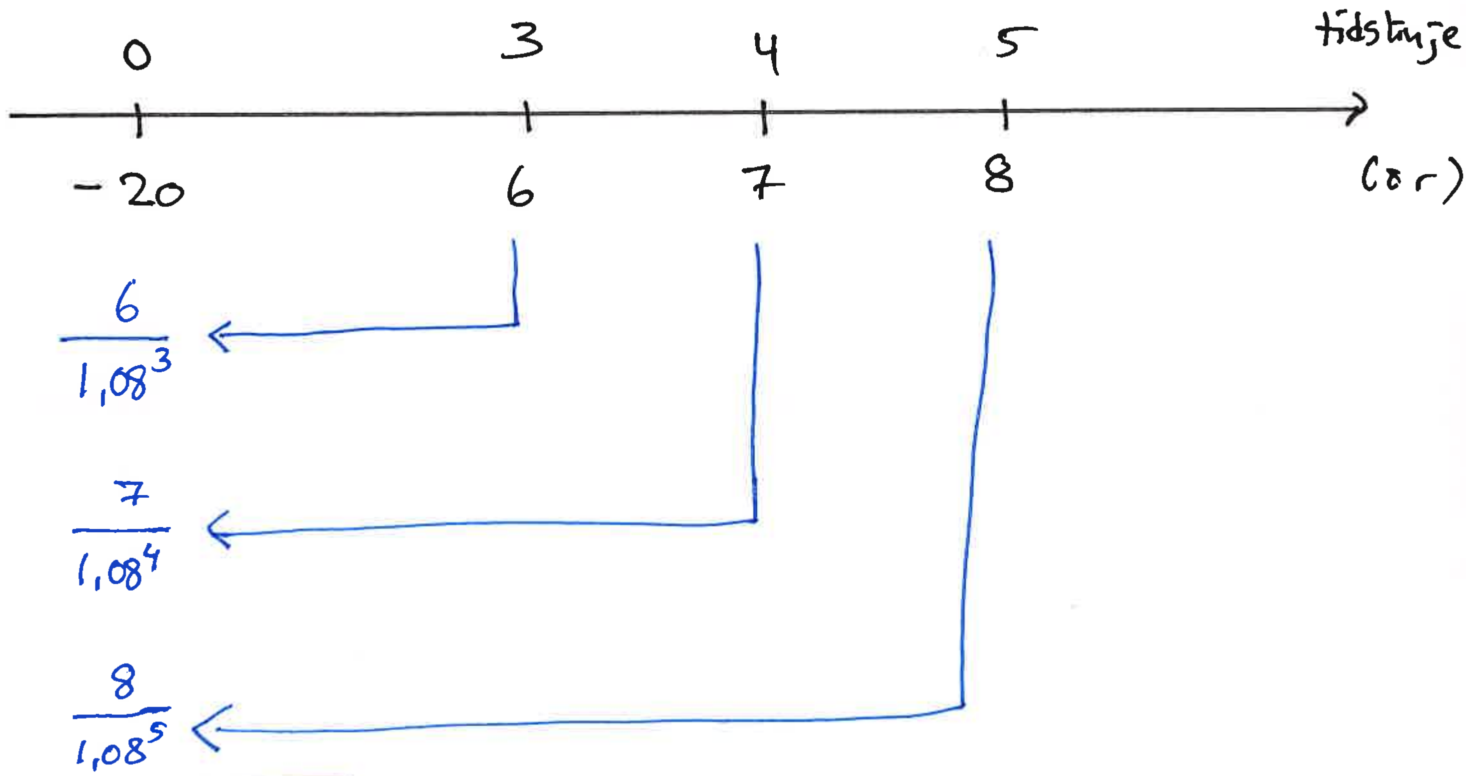
6 mill etter 3 år

7 mill etter 4 år

8 mill etter 5 år

Rente: 8 %

år	0	3	4	5
betaling	−20	6	7	8



$$= -20 + \frac{6}{1{,}08^3} + \frac{7}{1{,}08^4} + \frac{8}{1{,}08^5}$$ er nåverdien

til kontantstrømmen med 8% rente

$= -4{,}65$ (dårlig investering)

Renten som gjør at nåverdien til kontantstrømmen er lik 0 kalles

internrenten.

- generelt vanskelig å finne eksakt

Hjemmelekse : Bestem internrenten i eks.

(svar : 1,12 %)