MET 1181, 14. forelesning, 11. nov. 2021, Runar Ile

Plan
1. Implisitt derivasjon
2. Den andrederiverte og krumning
3. Konveks optimering

1. Implisitt derivasjon

Eks 1 $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ så er $f'(x) = (-1)\cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$

– vanlig derivasjon

Alternativ Setter $y = f(x)$, så $y = \frac{1}{x} \quad | \cdot x$

og får likningen $\boxed{xy = 1}$

Prøver å finne y' uttrykt v.h.a. x og y.

Deriverer v.s. og h.s. med hensyn på x:

$$(xy)'_x = (1)'_x$$

Bruker produktregelen på v.s.

$$\underbrace{(x)'_x}_{1}\cdot y + x\cdot(y)'_x = 0$$

dvs
$$y + x\cdot y' = 0$$

Løser denne for y'.

$$x\cdot y' = -y \quad |:x$$

$$\boxed{y' = -\frac{y}{x}}$$

(Husk: $y = \frac{1}{x}$ så $y' = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = -\frac{1}{x^2}$)

Poenget: Vi behøver ikke kjenne uttrykket for $y(x)$.

Dette kalles implisitt derivasjon.

F.eks Hvis $x = 2$ så er $2y = 1$ dvs $y = \frac{1}{2}$

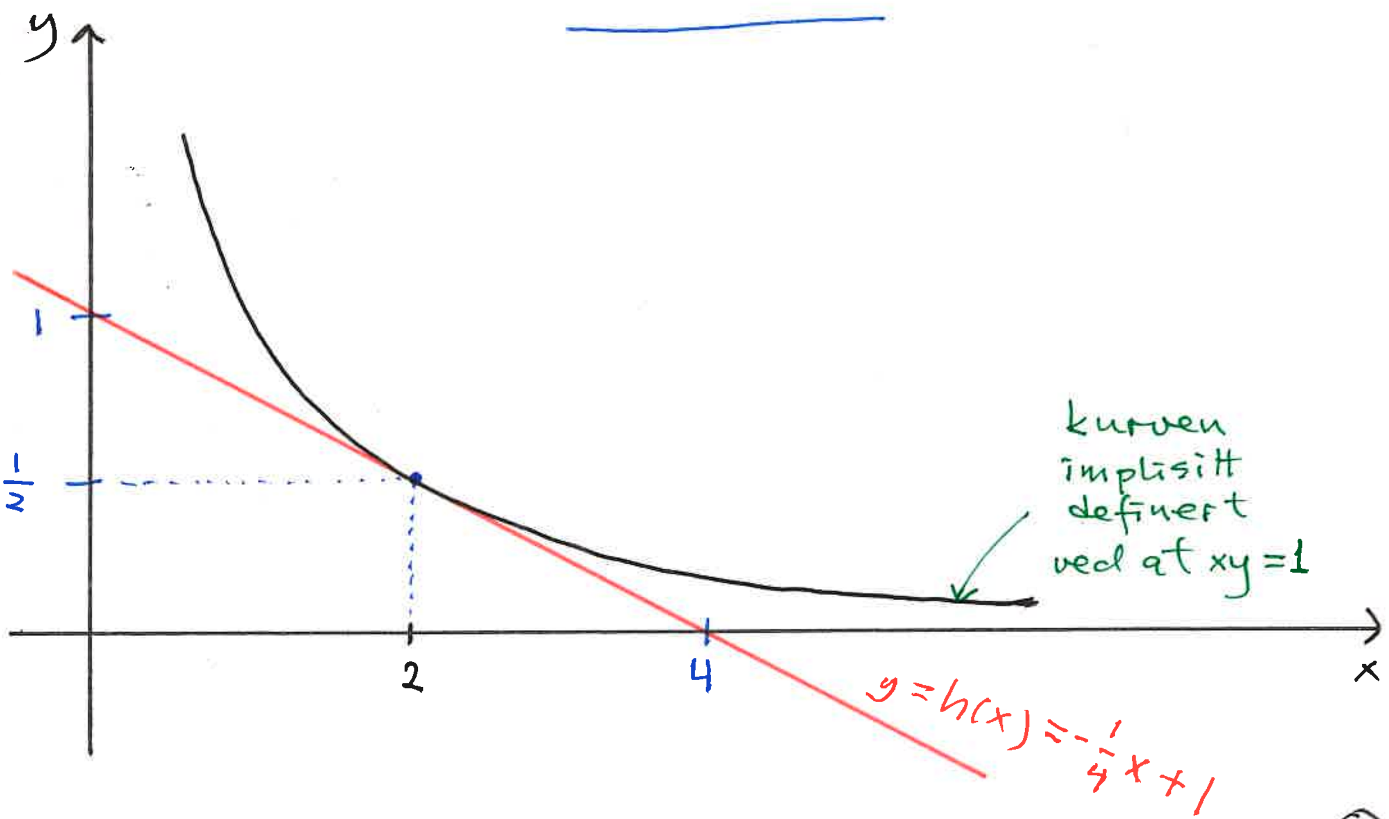
Da er $y'\big|_{\substack{x=2 \\ y=\frac{1}{2}}} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{4}$

Anvendelse Bruker stigningstallet til å finne funksjonsuttrykket $h(x)$ til tangenten i punktet $\left(2, \frac{1}{2}\right)$:

Ettpunktsformelen gir

$$h(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cdot(x - 2)$$

så $h(x) = -\frac{1}{4}x + 1$



Eks 2 En kurve er implisitt definert ved at

$$y^2 - x^3 = 1$$

a) Uttrykk y' v.h.a. y og x ved implisitt derivasjon (tenker på y som en funksjon av x)

b) Finn alle løsninger for y når $x = 2$

c) Beregn y' for disse punktene.

Løsning a) Derivérer begge sider av likningen:

$$(y^2)'_x - (x^3)'_x = (1)'_x$$

Bruker kjerneregelen med

$u = y$ og $g(u) = u^2$

$u'_x = y'_x$ $g'(u) = 2u$

$$2y \cdot y' - 3x^2 = 0$$

Løser denne nye likningen for y'.

$$2y \cdot y' = 3x^2 \quad | : 2y$$

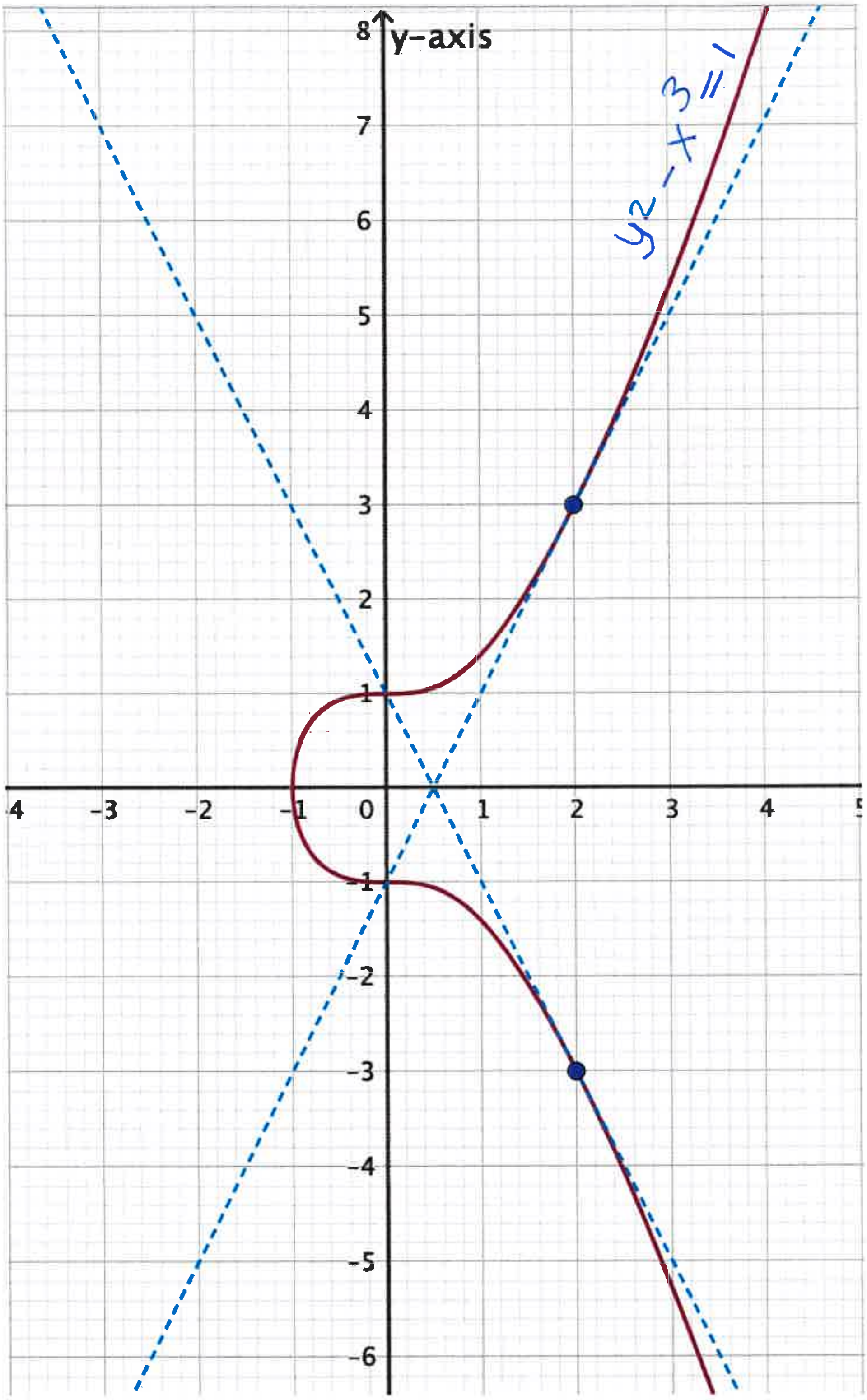
$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

b) $x = 2$ gir likningen

$y^2 - 2^3 = 1$ dvs $y^2 = 9$

så $y = \pm 3$

så to punkter: $(2, -3)$ og $(2, 3)$.


y-axis
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
y2 - x3 = 1

c) $(2,-3)$ gir $y' = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot (-3)} = \underline{\underline{-2}}$

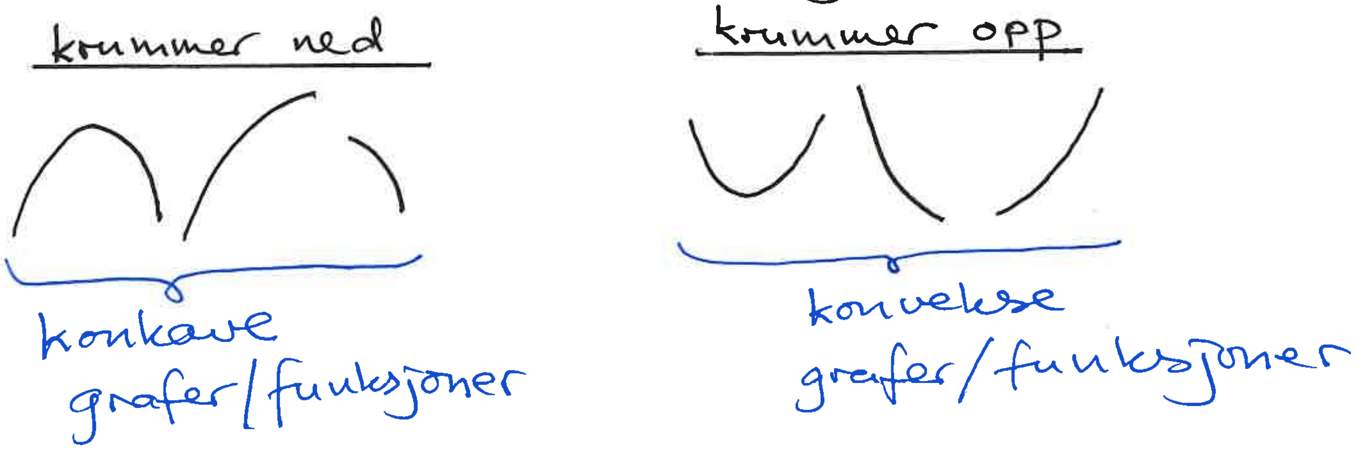
$(2, 3)$ gir $y' = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{2}}$

---

2. Den andre deriverte og krumning

Start: 8.55

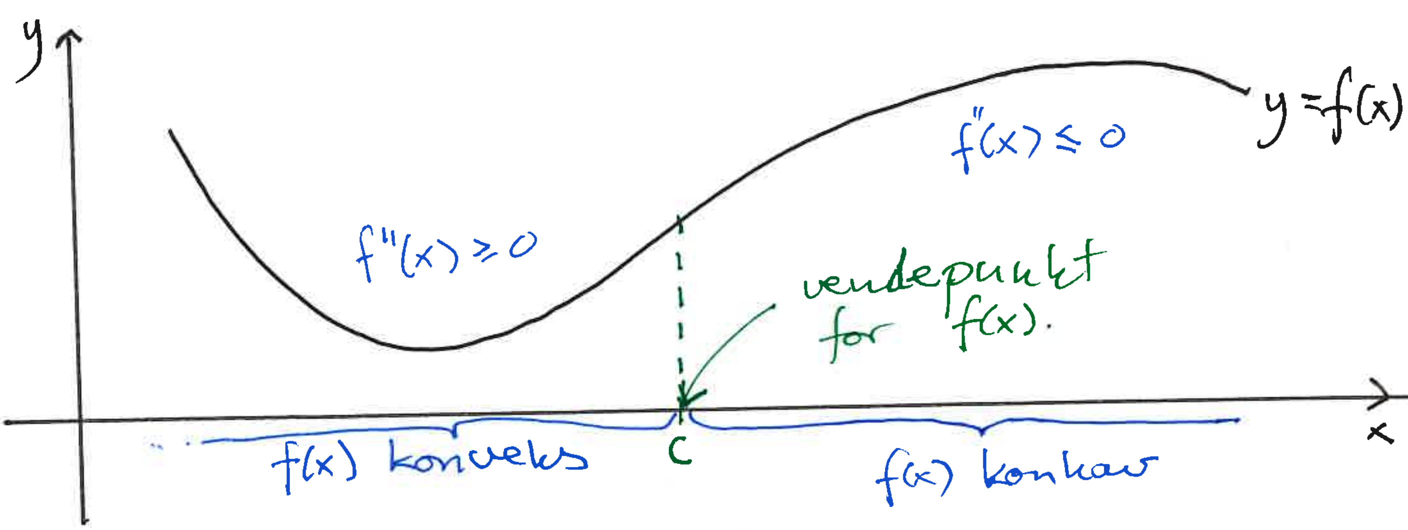
Hvilken vei krummer grafen?



<u>Definisjon</u> $f(x)$ er <u>konveks</u> på intervallet $[a, b]$ hvis $f''(x) \geq 0$ for alle x i $\langle a, b \rangle$

og <u>konkav</u> hvis $f''(x) \leq 0$ —"— .

Et tall c er <u>vendepunkt</u> for $f(x)$ hvis $f''(x)$ endrer fortegn ved $x = c$.

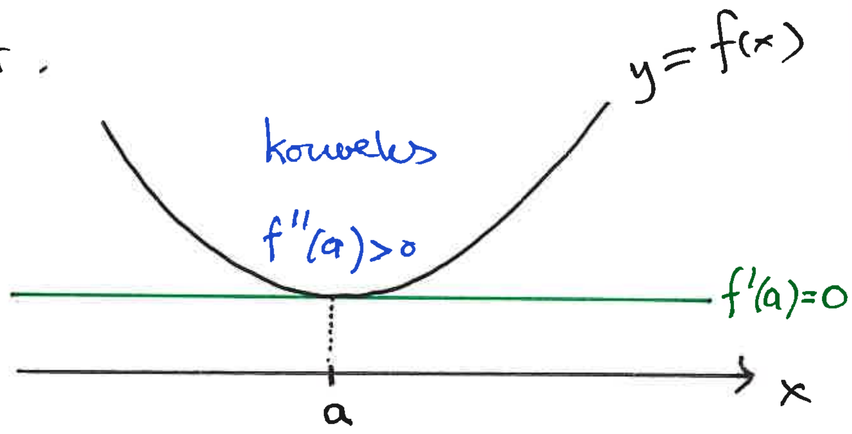


Merk Hvis $f(x)$ er konveks er $f'(x)$ en voksende funksjon
Hvis $f(x)$ er konkav er $f'(x)$ en avtagende funksjon.

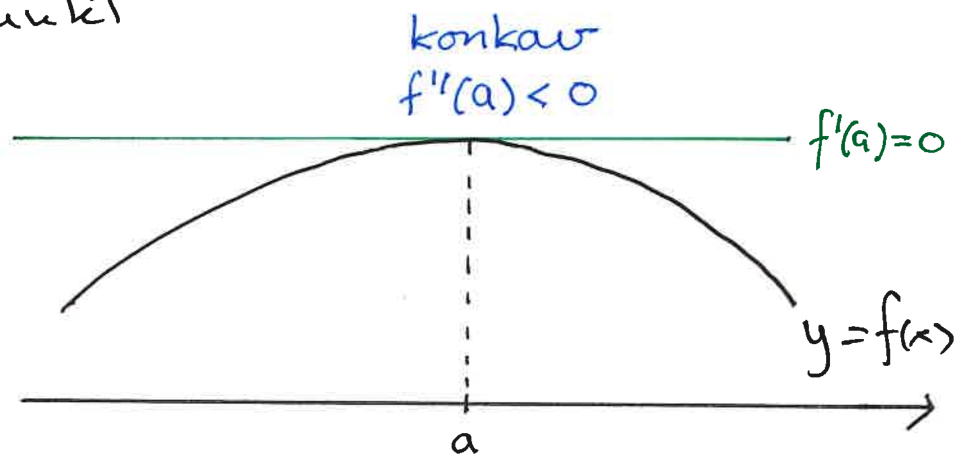
Andrederiverttesten

Anta $x=a$ er et stasjonært punkt for $f(x)$, dvs $f'(a)=0$.

Hvis $f''(a)>0$ så er $x=a$ et (lokalt) minimumspunkt.



Hvis $f''(a)<0$ så er $x=a$ et (lokalt) maksimumspunkt



Eks $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$. Vil finne maks./min.

Beregner $f'(x) = 3x^2 - 6x$ og løser likn. $f'(x) = 0$ for å finne stasjonære punkter

dvs

$$3x^2 - 6x = 0$$

setter $3x$ utenfor en parantes

$$3x(x-2) = 0$$

dvs $\underline{x=0}$ el. $\underline{x=2}$

Bruker andrederiverttesten for å avgjøre om 0 og 2 er maks. el. min.

Beregner $f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 6x)' = \underline{6x - 6}$

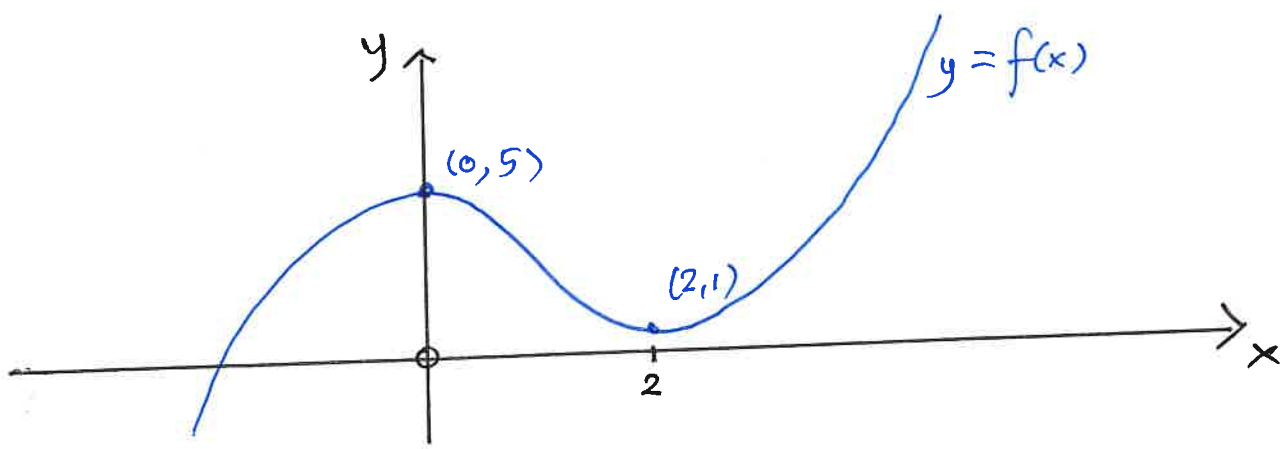
Setter inn de stasjonære punktene

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$

Dvs $x = 0$ er et (lokalt) maksimumspunkt

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$

Dvs $x = 2$ er et (lokalt) minimumspunkt.



3. Konveks optimering

Hvis $f(x)$ er konveks i $D_f = [a, b]$ -

vil ethvert stasjonært punkt gi globalt minimum

og hvis $f(x)$ er konkav i D_f er alle

stasjonære punkter globale maksimumspunkter

Eks $f(x) = x^4 + 5x^2 + 3$ og $D_f = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$

(*) Finn stasjonære punkter

(*) Bruk konveks optimering til å avgjøre om de er globale maks./min.

Løsning Finner $f'(x) = 4x^3 + 10x$

Løser $f'(x) = 0$ dvs $4x^3 + 10x = 0$

$$x(4x^2+10) = 0$$

så enten $x = 0$ el. $4x^2 + 10 = 0$

– eneste stasjonære punktet for $f(x)$.

ingen løsn. fordi $4x^2 + 10 \geq 10$

Beregner $f''(x) = 12x^2 + 10 \geq 10$ for alle x

så spesielt er $f''(x) \geq 0$ for alle x

så $f(x)$ er konveks på hele tallinjen.

Derfor er $x = 0$ et globalt minimumspunkt

(med global minimumsverdi $f(0) = 3$)