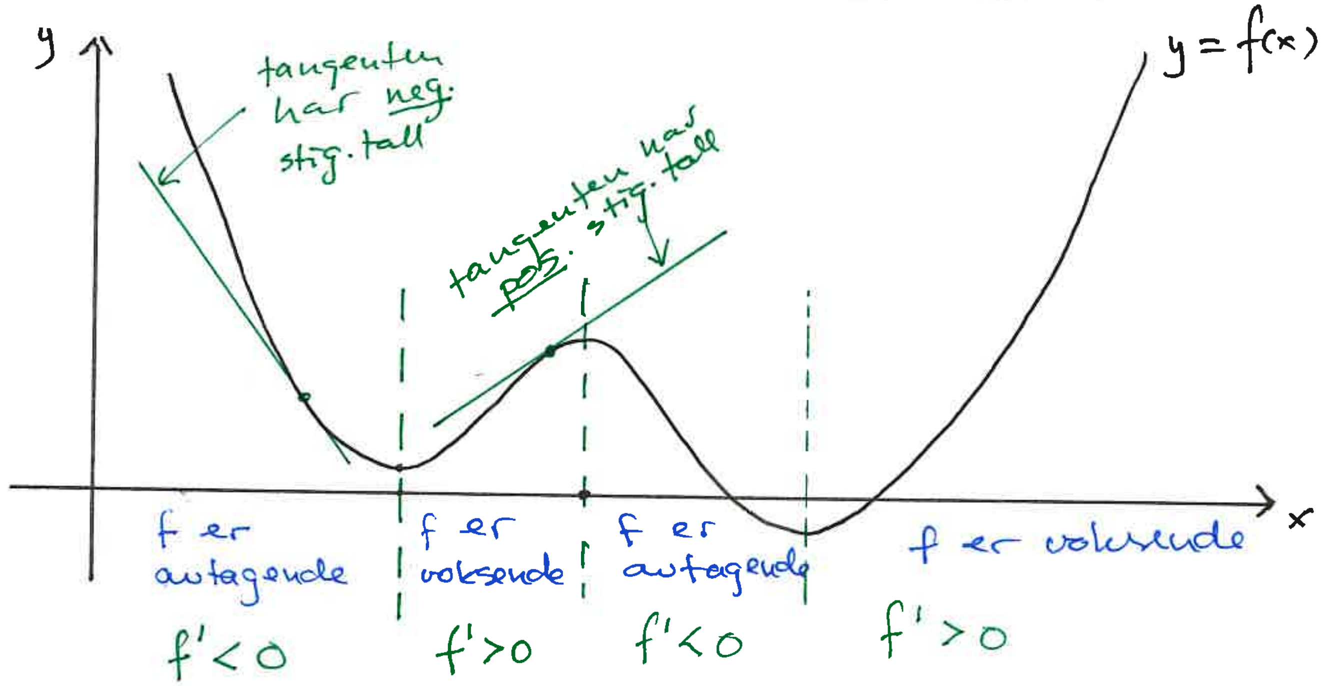
MET 1181, 13. forelesning, 4. nov. 2021, Runar Ile

Plan
1. Lokale maks/min og stasjonære punkter
2. Globale maks/min
3. Middelverdisetningen

kap. 4.6

1. Lokale maks./min. og stasjonære punkter



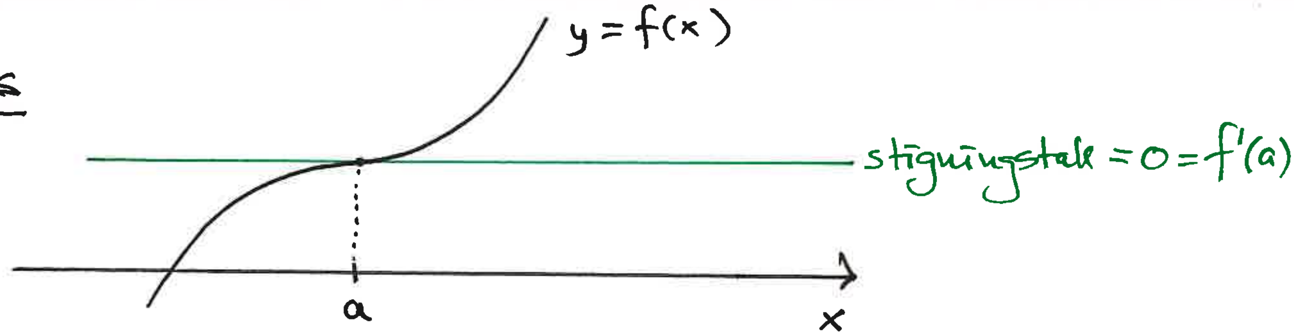
Hvis $f'(x)$ er pos., så er grafen til $f(x)$ voksende
Hvis $f'(x)$ er neg., så er grafen til $f(x)$ avtagende

Hvis $x = a$ er et lokalt minimumspunkt, vil $f'(a) = 0$ og $f'(x)$ skifter fortegn fra $-$ til $+$

Hvis $x = a$ er et lokalt maksimumspunkt, vil $f'(a) = 0$ og $f'(x)$ skifter fortegn fra $+$ til $-$

Viktig konklusjon: Fortegnsskjema til $f'(x)$ bestemmer hvor $f(x)$ vokser, avtar og hvor de (lokale) maks. og min. punktene er.

Eks



Her er $x = a$ ikke et lokalt maks. el. min. punkt. Men $x = a$ er et terrassepunkt.
(den deriverte er 0, men skifter ikke fortegn)

Definisjon. Hvis $f'(a) = 0$ er $x = a$ et stasjonært punkt

Eks $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

Stasjonære punkter

– løser likningen $f'(x) = 0$ for x

Finner først $f'(x) = (x^3)' - 6(x^2)' + (5)'$

$$= 3x^2 - 6 \cdot 2x + 0$$

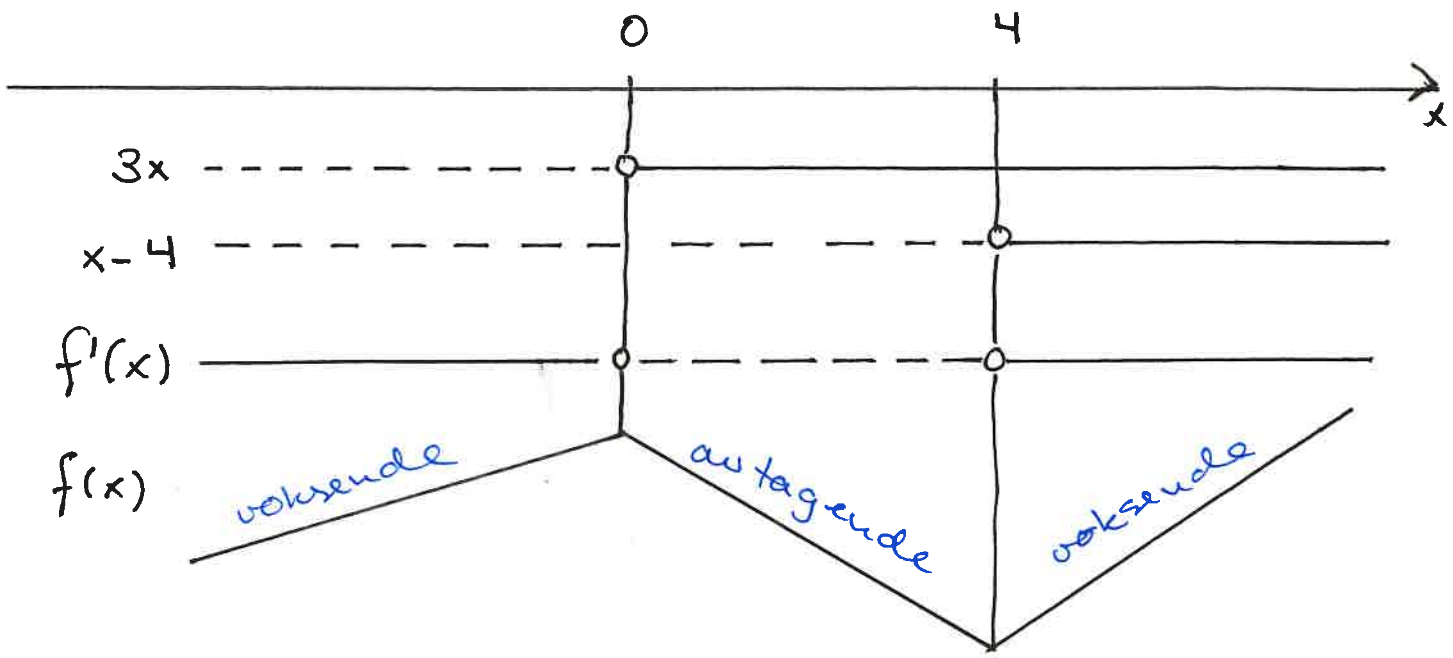
$$= 3x^2 - 12x$$

$$= 3x(x - 4)$$

så $f'(x) = 0$ har løsninger $\underline{\underline{x = 0}}$, $\underline{\underline{x = 4}}$

Hvor vokser/avtar $f(x)$?

Bestemmer fortegnet til $f'(x)$ ved å bruke fortegnsskjema.

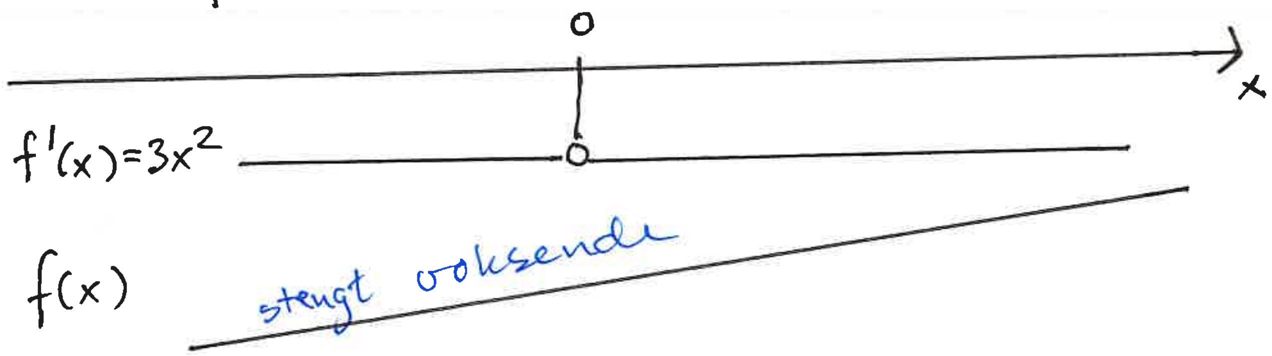


$f(x)$ er strengt voksende for $x \leq 0$ (så: $x \in \langle \leftarrow, 0]$)
$f(x)$ er strengt avtagende for $0 \leq x \leq 4$ (så: $x \in [0, 4]$)
$f(x)$ er strengt voksende for $x \geq 4$ (så: $x \in [4, \rightarrow \rangle$)

Da er $x = 0$ et lokalt maksimumspunkt
og $x = 4$ er et lok. minimumspunkt.

Eks $f(x) = x^3 + 1$

$f'(x) = 3x^2$, så $x = 0$ er eneste stasjonære punkt for $f(x)$.



Konklusjon: $f(x)$ er strengt voksende for alle x på tallinjen:

$x \in \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$

Start: 8.55

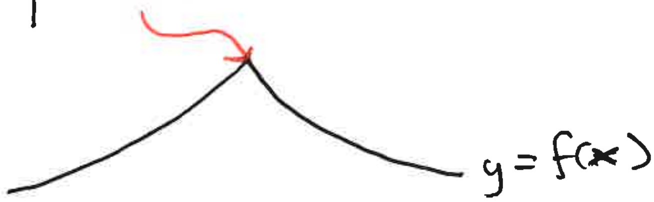
2. Global maks./min.

Ekstremverdisetningen Hvis $f(x)$ er kontinuerlig på intervallet $D_f = [a, b]$ så har $f(x)$ et maksimum og et minimum "globalt" "globalt"

Tre mulige typer av maks./min. punkter

(*) stasjonære punkter $(f'(x) = 0)$

(*) knekkpunkter (hvor $f'(x)$ ikke er definert)



(*) endepunktene $x = a$ og $x = b$ til intervallet

<u>Ex</u> $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ med $D_f = [-1, 7]$

Finn maks./min. til $f(x)$.

(*) stasjonære punkter: $f'(x) = 3x^2 - 12x = 0$ gir $\underline{x = 0}$, $\underline{x = 4}$

(*) knekkpunkter: ingen fordi $f'(x)$ er definert for alle x.

(*) endepunktene: $\underline{x = -1}$, $\underline{x = 7}$

Disse fire punktene (x-verdiene) er <u>kandidatpunkter</u> for maks/min.

Regner funksjonsverdiene for kandidatpunktene

$f(-1) = -2$

$f(0) = 5$

$f(4) = -27$

$f(7) = 54$

Så $x = 4$ gir globalt minimum $f(4) = \underline{\underline{-27}}$

og $x = 7$ gir globalt maksimum $f(7) = \underline{\underline{54}}$

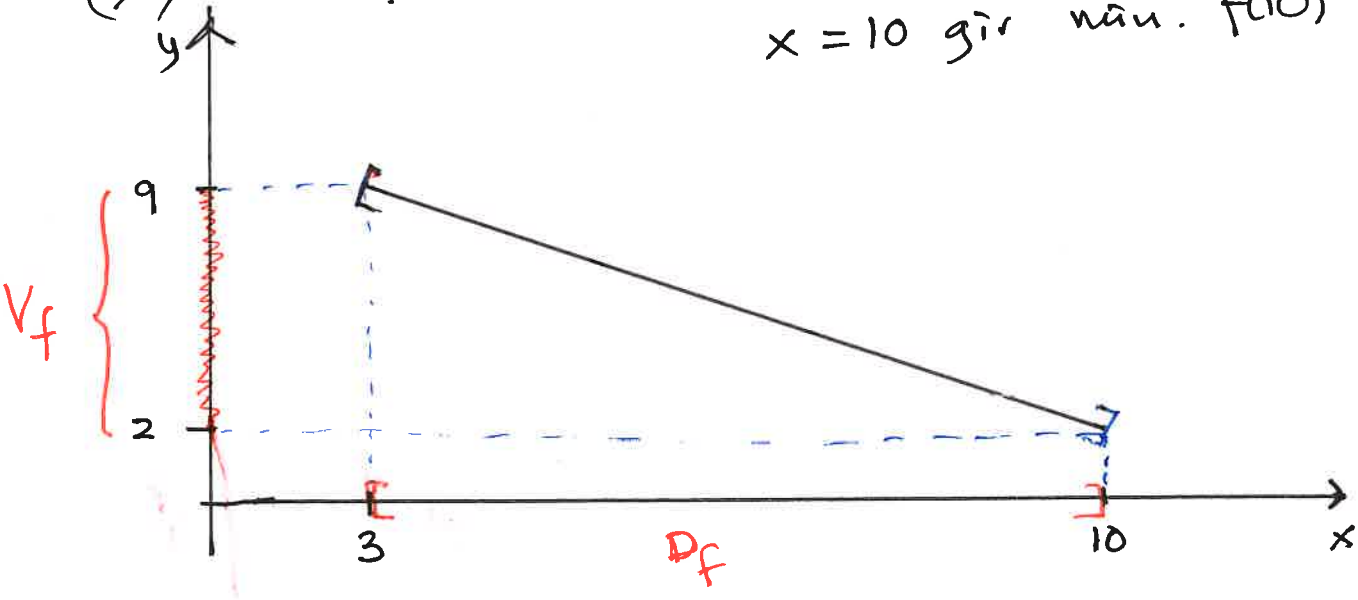
<u>Eks</u> $f(x) = 12 - x$ med $D_f = [3, 10]$

(*) $f'(x) = -1 \neq 0$ så ingen stasjonære punkter

(*) ingen knekkpunkter ($f'(x)$ finnes for alle x)

(*) endepunkter: $x = 3$ gir maks. $f(3) = 9$

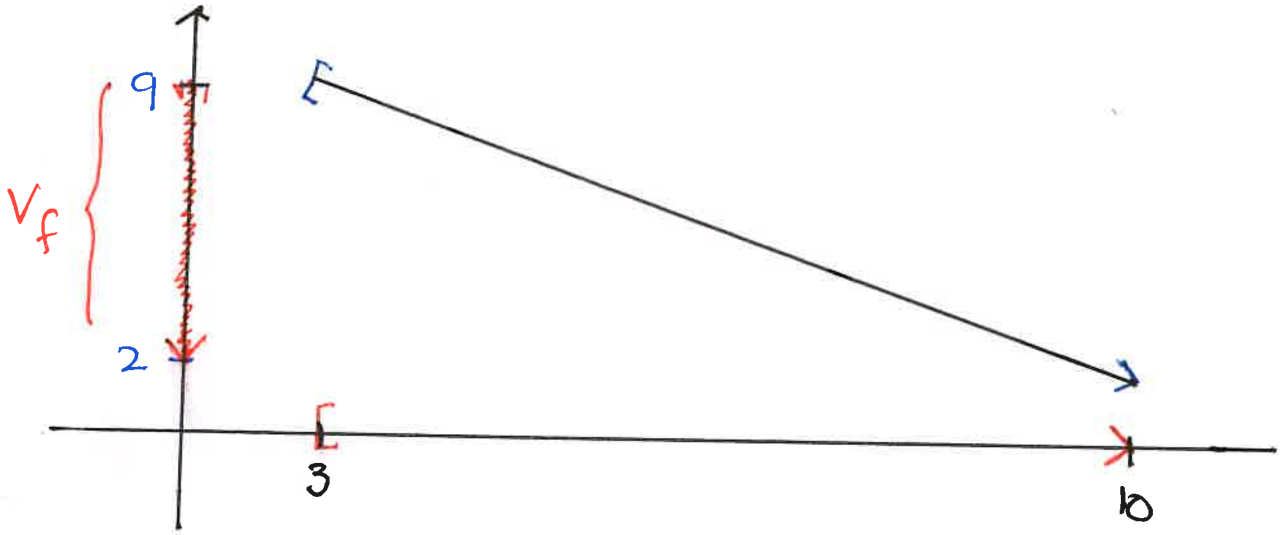
$x = 10$ gir min. $f(10) = 2$



$V_f = [2, 9]$

Eks $f(x) = 12 - x$ og $D_f = [3, 10\rangle$

Da er $x = 3$ fremdeles maksimumspunktet, men det finnes ikke noe minimumspunkt

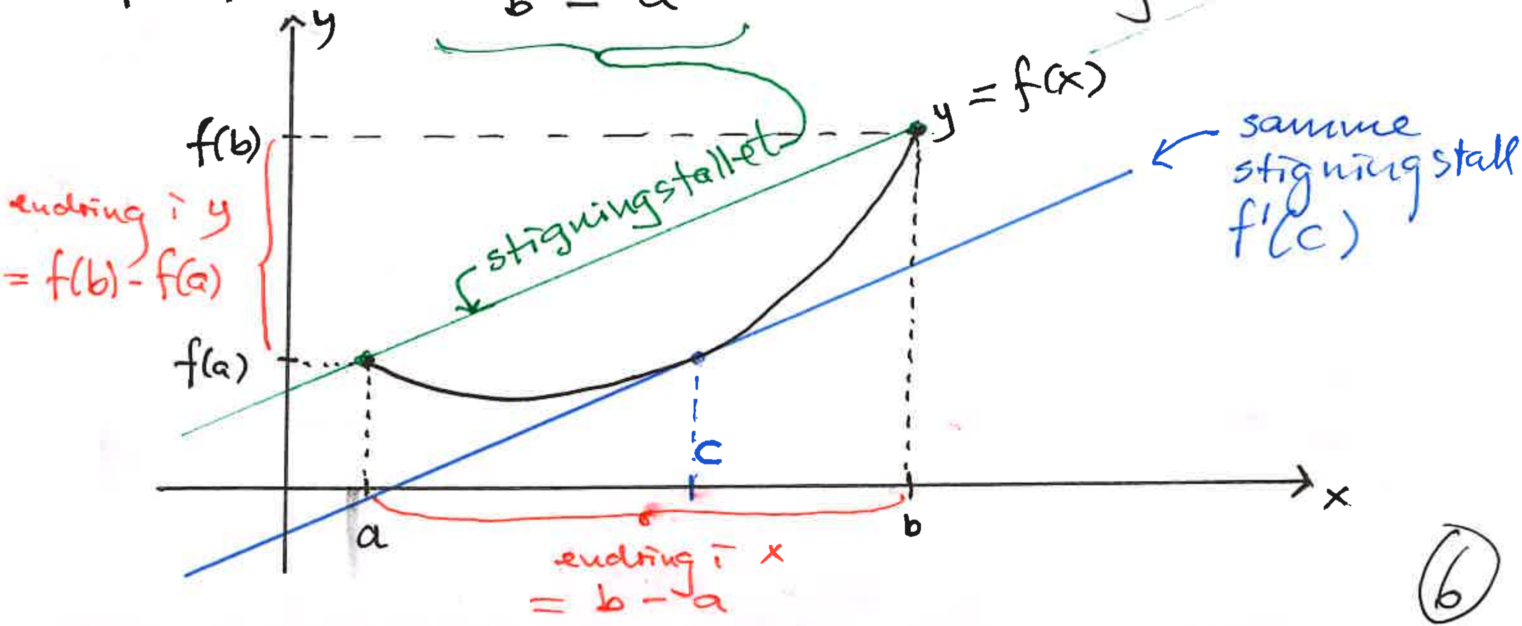


$V_f = \langle 2, 9]$ 2 er ikke med i V_f !

---

3. Middelverdisetningen Hvis $f(x)$ er definert og kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ og er deriverbar (ingen knekkpunkter) så finnes et tall c mellom a og b $(a < c < b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\text{endring i } y}{\text{endring i } x}$$



6

Eks $f(x) = e^x + x^2$

Da er $f(0) = 1$ og $f(1) = e + 1$

Ved middelverdisetningen finnes et tall c mellom 0 og 1 slik at

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{e + 1 - 1}{1} = e$$

Merk $f'(x) = e^x + 2x$ (lett)

Men vi klarer ikke å finne en eksakt løsning på likningen $f'(x) = e^x + 2x = e$