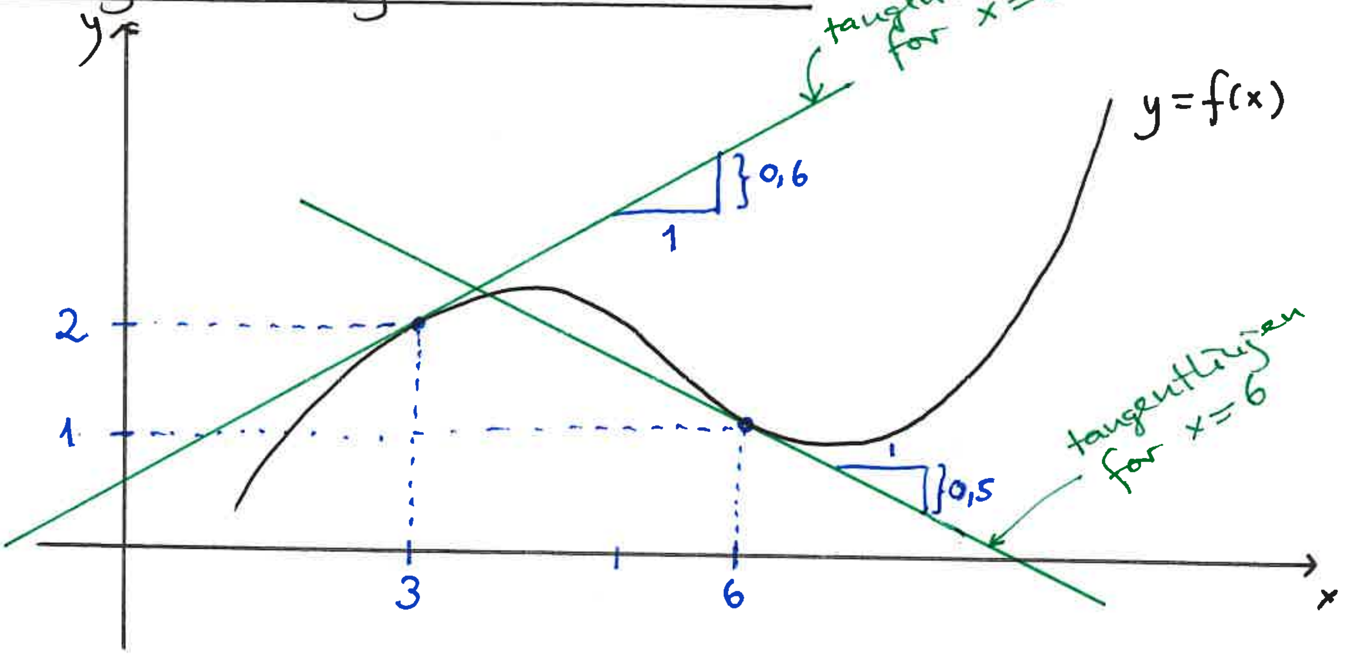
MET 1181, 11. forelesning, 28. okt. 2021, Runar Ile

Plan

1. Tangenter og den deriverte — kap. 4.1 (og 4.4)
2. Den deriverte som funksjon — kap. 4.2
3. Derivasjonsreglene — kap. 4.3

1. Tangenter og den deriverte



I punktet $(3,2)$ har tangenten til grafen til $f(x)$ stigningstall $0,6$. Vi skriver $f'(3) = 0,6$

I punktet $(6,1)$ har tangenten til $f(x)$ stigningstall $-0,5$. Vi skriver $f'(6) = -0,5$

To viktige anvendelser

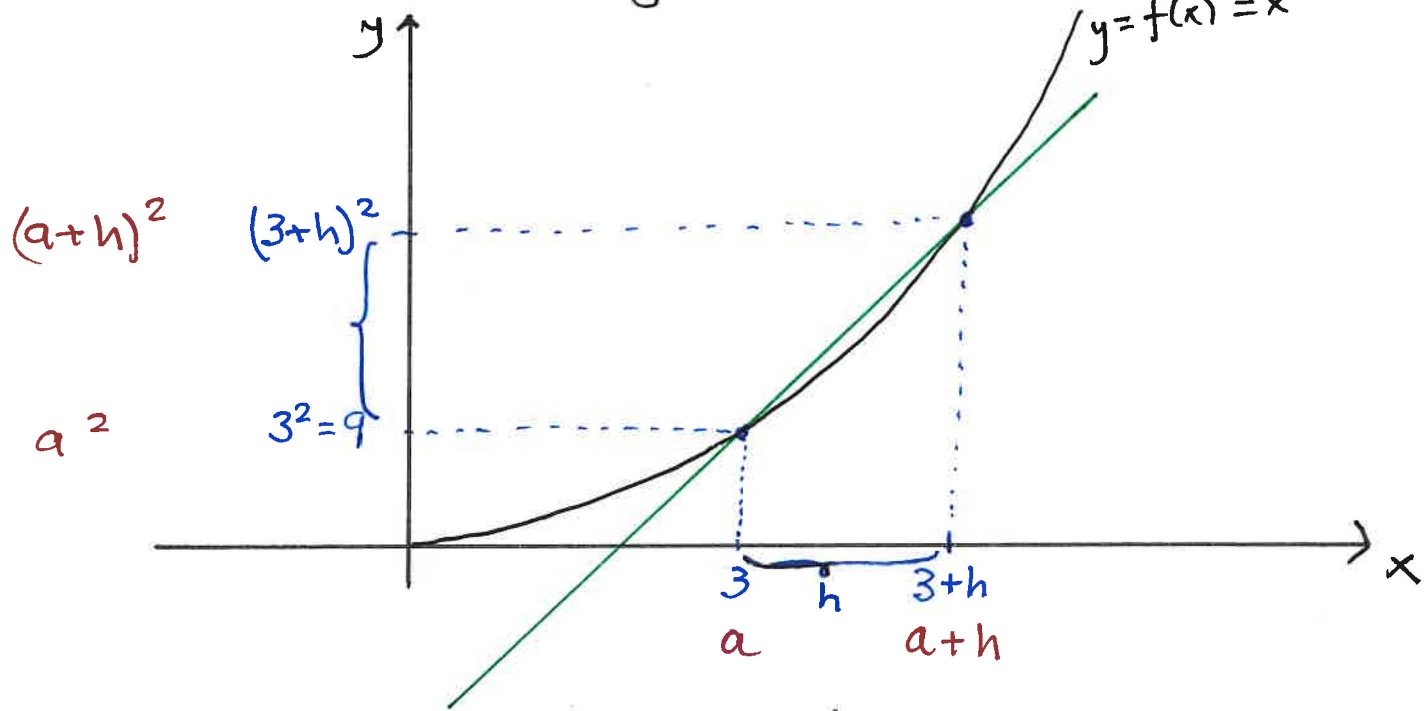
1) Finne hvor funksjonen vokser og avtar og hvor maksimum og minimum er.

2) Tilnærme kompliserte funksjoner med lineære funksjoner
   - matematiske modeller i økonomi er ofte lineære

Hvordan finner vi stigningstallet til tangenten?

Eks $f(x) = x^2$ i punktet $(3, 9)$

– hva er stigningstallet?



Stigningstallet til sekantlinjen er

$$\frac{\text{endring i } y}{\text{endring i } x} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{(a+h)(a+h) - a^2}{h} = \frac{(3+h)(3+h) - 9}{h}$$

$$= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{\cancel{9} + 2\cdot 3h + h^2 - \cancel{9}}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = \frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}}$$

$$2a + h \xrightarrow[h \to 0]{} 2a$$

$$= 6 + h \xrightarrow[h \to 0]{} 6 \quad \text{som derfor er}$$

stigningstallet til tangenten til $f(x)$ i $(3, 9)$.

Vi skriver $f'(3) = 6$

På samme måte: $f'(a) = 2a$

2. Den deriverte som en funksjon

I eks. med $f(x) = x^2$ fikk vi at $f'(a) = 2a$
– dette er en funksjon. Vi bruker x som variabel:

$$f'(x) = 2x$$

F.eks. er stigningstallet til tangenten til $f(x) = x^2$ i $(-3, 9)$ er

$$f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$$

Vi kunne gjort det samme med $f(x) = x^3$

$$\frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \ldots = \underbrace{3a^2 + 3ah + h^2}_{\downarrow\, h \to 0 \atop 3a^2}$$

så $f'(x) = 3x^2$

3. Derivasjonregler

Potensregelen $\quad f(x) = x^n$ gir $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

NB: Gjelder for alle tall n.

Eks $f(x) = x^{10}$, $\quad f'(x) = 10 \cdot x^9$

Eks $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $\quad f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$

$= x^{\frac{1}{3}}$ $\quad = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}}$

$\boxed{\text{Start: 9.00}}$

Addisjonsregelen Hvis $f(x) = g(x) + h(x)$

så er $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Eks $f(x) = x + x^3$, $f'(x) = 1 + 3x^2$

Konstantregelen Hvis k er et (konstant) tall

og $f(x) = k \cdot g(x)$

så er $f'(x) = k \cdot g'(x)$

Eks $k = 7$, $g(x) = x^2$, da er $f(x) = 7x^2$

så da er $f'(x) = 7 \cdot 2x = 14x$

Produktregelen Hvis $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

så er $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Eks $f(x) = (5x^3 - 2x + 1) \cdot (3x + 7)$

Beregner $f'(x)$ ved å bruke produktregelen.

$g(x) = 5x^3 - 2x + 1$ og $h(x) = 3x + 7$

$g'(x) = 15x^2 - 2$ og $h'(x) = 3$

Så $f'(x) = (15x^2 - 2) \cdot (3x + 7) + (5x^3 - 2x + 1) \cdot (3)$

husk parantesene!

$\overset{\text{regner}}{=} \underline{\underline{60x^3 + 105x^2 - 12x - 11}}$

Brøkregelen

Har $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

Da er $f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

Eks $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x+5}$. Finner $f'(x)$ ved brøkregelen:

$g(x) = 3x+1$ og $h(x) = 2x+5$

$g'(x) = 3$ $h'(x) = 2$

parenteser!

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (2x+5) - (3x+1) \cdot 2}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 - (3x \cdot 2 + 1 \cdot 2)}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{6x + 15 - 6x - 2}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{13}{(2x+5)^2}$$

vanligvis best å ikke regne ut nevneren!

Kjerneregelen

Hvis $f(x) = \underset{\uparrow}{g}\,(\underbrace{u(x)}_{\text{den indre funksjonen}})$

den ytre funksjonen $g(u)$

Da er

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

hvor $u = u(x)$

Eks $f(x) = (\underbrace{x^2 + 2}_{u})^{10}$

Setter $u = u(x) = x^2 + 2$ og $g(u) = u^{10}$

$u'(x) = 2x$ $\qquad g'(u) = 10u^9$

Da er
$$f'(x) = 10u^9 \cdot 2x$$
$$= 10(x^2+2)^9 \cdot 2x$$
$$= \underline{\underline{20x(x^2+2)^9}}$$

To funksjoner

$f(x) = e^x$ $\qquad$ og $\qquad g(x) = \ln(x)$

$f'(x) = e^x$ $\qquad\qquad g'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

Eks $f(x) = e^{3x}$

$u(x) = 3x$ og $g(u) = e^u$

$u'(x) = 3$ $\qquad g'(u) = e^u$

så $f'(x) = \underline{\underline{3 \cdot e^{3x}}}$

Eks $f(x) = \ln(x^2+1)$

så er $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Bruk kjerneregelen med $u = x^2+1$