Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Regn ut de bestemte integralene, og lag figurer som viser disse som areal:

a) $\int_0^4 3 \, \mathrm{d}x$ b) $\int_0^8 (10 + 3x) \, \mathrm{d}x$

Oppgave 2.
Regn ut de ubestemte integralene:

a) $\int x^2 \, \mathrm{d}x$ b) $\int (8x^3 - 12x^2) \, \mathrm{d}x$ c) $\int (e^x - 6x) \, \mathrm{d}x$ d) $\int (x^2/3 - x^3/2) \, \mathrm{d}x$

Oppgave 3.
Finn en funksjon $f(x)$ med angitt definisjonsområde slik at:

a) $f'(x) = 2$, $D_f = (-\infty, \infty)$ b) $f'(x) = 2x$, $D_f = (-\infty, \infty)$ c) $f'(x) = 6x^2$, $D_f = (-\infty, \infty)$
d) $f'(x) = 1/x$, $D_f = (0, \infty)$ e) $f'(x) = 1/x$, $D_f = (-\infty, 0)$ f) $f'(x) = 1/x$, $D_f = \{x : x \neq 0\}$

Oppgave 4.
Finn en funksjon $f(x)$ slik at:

a) $\int f(x) \, \mathrm{d}x = 2 + \mathcal{C}$ b) $\int f(x) \, \mathrm{d}x = 2x + \mathcal{C}$ c) $\int f(x) \, \mathrm{d}x = 6x^2 + \mathcal{C}$ d) $\int f(x) \, \mathrm{d}x = xe^{2x} + \mathcal{C}$
e) $\int 2 \, \mathrm{d}x = f(x) + \mathcal{C}$ f) $\int 2x \, \mathrm{d}x = f(x) + \mathcal{C}$ g) $\int 6x^2 \, \mathrm{d}x = f(x) + \mathcal{C}$ h) $\int xe^{2x} \, \mathrm{d}x = f(x) + \mathcal{C}$

Oppgave 5.
Bestem konstantene A og B slik at

$$\int \frac{(A + Bx) \cdot e^{2x}}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{x} \cdot e^{2x} + \mathcal{C}$$

Oppgave 6.
Regn ut de ubestemte integralene:

a) $\int x^{-3} \, \mathrm{d}x$ b) $\int \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$ c) $\int x\sqrt{x} \, \mathrm{d}x$ d) $\int 1/x \, \mathrm{d}x$ e) $\int 1/x^2 \, \mathrm{d}x$
f) $\int (x - 2x^3) \, \mathrm{d}x$ g) $\int x(1 - 2x) \, \mathrm{d}x$ h) $x \int (1 - 2x) \, \mathrm{d}x$ i) $\int (x + 1)^2 \, \mathrm{d}x$ j) $\int (x + 1)^7 \, \mathrm{d}x$

Oppgave 7.
Regn ut disse ubestemte integralene:

a) $\displaystyle\int \frac{1-3x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-2}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{6x}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 8.
Regn ut disse ubestemte integralene:

a) $\int (1+e^{2x})\,\mathrm{d}x$ b) $\int e^{1+2x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int e^{1-2x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int 3^x\,\mathrm{d}x$

Oppgave 9.
Regn ut disse ubestemte integralene:

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int 9(x+1)^7\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 10.
Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Oppgave 11.
Anta at $f(x) \geq 0$ for alle x, og at $F(x)$ er en funksjon slik at $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathcal{C}$. Er $F(x)$ en voksende funksjon? Forklar hvorfor/hvorfor ikke.

Oppgave 12.
Vi ser på funksjonen definert ved

$$f(x) = \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

a. Regn ut $f'(x)$.

b. Vis at f er avtagende i definisjonsområdet $D_f = (0, \infty)$.

c. Bestem grenseverdiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)$$

d. Lag en grov skisse av grafen til f, basert på det du har funnet ut tidligere i oppgaven, og markér området som ligger mellom grafen til f og x-aksen (for $x > 0$) på tegningen.

Oppgave 13.
Skriv ned en sum (basert på minst $n = 10$ delintervall) som tilnærmer det bestemte integralet

$$\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x$$

og vis det bestemte integralet og tilnærmingen som arealer i en figur.

Oppgave 14.
Oppgaver fra læreboken: 5.1.1 - 5.1.5, 5.2.1 - 5.2.5, 5.3.1 - 5.3.3

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) 12

b) 176

Oppgave 2.

a) $\frac{1}{3}x^3 + \mathcal{C}$

b) $2x^4 - 4x^3 + \mathcal{C}$

c) $e^x - 3x^2 + \mathcal{C}$

d) $\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{C}$

Oppgave 3.

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = 2x^3$

d) $f(x) = \ln(x)$

e) $f(x) = \ln(-x)$

f) $f(x) = \ln|x|$

Oppgave 4.

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 2$

c) $f(x) = 12x$

d) $f(x) = (1 + 2x)e^{2x}$

e) $f(x) = 2x$

f) $f(x) = x^2$

g) $f(x) = 2x^3$

h) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{2x}$

Oppgave 5.

$A = 1,\ B = 4$

Oppgave 6.

a) $-\frac{1}{2}x^{-2} + \mathcal{C}$

b) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \mathcal{C}$

c) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \mathcal{C}$

d) $\ln|x| + \mathcal{C}$

e) $-1/x + \mathcal{C}$

f) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{C}$

g) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \mathcal{C}$

h) $x(x - x^2 + \mathcal{C})$

i) $\frac{1}{3}(x+1)^3 + \mathcal{C}$

j) $\frac{1}{8}(x+1)^8 + \mathcal{C}$

Oppgave 7.

a) $-1/x - 3x + \mathcal{C}$

b) $\frac{1}{3}x^3 + 2x - 2\ln|x| + \mathcal{C}$

c) $\ln(1 + 3x^2) + \mathcal{C}$

d) $-2/\sqrt{x} - 1/x + \mathcal{C}$

Oppgave 8.

a) $x + \frac{1}{2}e^{2x} + \mathcal{C}$

b) $\frac{1}{2}e^{1+2x} + \mathcal{C}$

c) $-\frac{1}{2}e^{1-2x} + \mathcal{C}$

d) $\frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x + \mathcal{C}$

Oppgave 9.

a) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + \mathcal{C}$

b) $\frac{9}{8}(x+1)^8 + \mathcal{C}$

c) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + \mathcal{C}$

d) $\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \mathcal{C}$

e) $\frac{1}{2}\ln(x)^2 + \mathcal{C}$

Oppgave 10.

$-2e^{1-\sqrt{x}} + \mathcal{C}$

Oppgave 11.

Siden $F'(x) = f(x)$ og $f(x) \geq 0$, er F en voksende funksjon.

Oppgave 12.

a. $f'(x) = \dfrac{e^{1-\sqrt{x}}(-\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}}$

b. Siden $f'(x) \leq 0$ for $x > 0$ er f avtagende

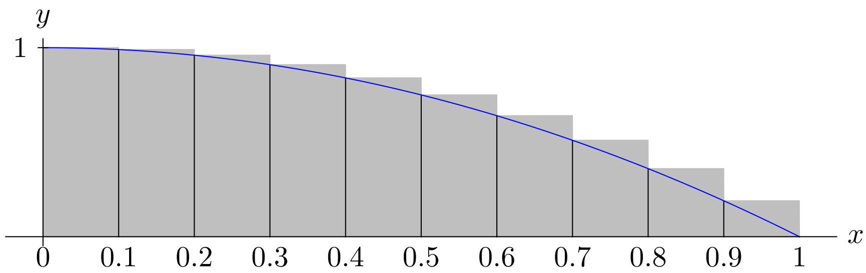
c. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Oppgave 13.

Hvis vi deler intervallet [0,1] inn i $n = 10$ like store delintervall, så blir delepunktene $x_i = i/10$ for $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Det vil si at $x_0 = 0$, $x_1 = 1/10$, $x_2 = 2/10$ og så videre. Det bestemte integralet er arealet under $f(x) = 1 - x^2$ på intervallet [0,1]. Vi kan tilnærme dette som arealet av ti rektangler, gitt ved summen

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{9} f(x_i)\cdot\Delta x_i &= \sum_{i=0}^{9}\left(1-(i/10)^2\right)\cdot\frac{1}{10} = (1+(1-1/100)+(1-4/100)+\cdots+(1-81/100))\cdot\frac{1}{10}\\ &= \frac{1}{10}\cdot\left(10-\frac{0+1+4+\cdots+81}{100}\right) = 0.715\end{aligned}$$

Summen er vist i figuren nedenfor. Det bestemte integralet er arealet under den blå kurven, altså litt mindre enn 0.715. Valget $n = 10$ er ikke viktig, men tilnærmingen blir bedre jo større n er.



Oppgave 14.

Fullstendig løsning av oppgaver fra læreboken [E] finnes i oppgaveboken [O].