MET 1181, ekstraforelesning A, 9. Nov. 2020, Runar Ile

Plan Oppgaver fra hefte 14

1d implisitt derivasjon
2 implisitt definerte kurver
6b Konkave/konvekse funksjoner
7b Vendetangenter
5a grafene til f, f' og f''

Oppg 1d $x^3 - 3xy + y^2 = 0$ (*)

Vi finner et uttrykk for y' i y og x ved å derivere begge sider av likningen med hensyn på x. Får ny likning med x, y og y' og løser den for y'.

Hjelperegninger

Produktregelen $(x \cdot y)'_x = (x)'_x \cdot y + x \cdot y'_x$
$= 1 \cdot y + x \cdot y'_x = y + x y'$

Kjerneregelen gir $(y^2)'_x = 2y \cdot y'_x$

Fra (*) får vi da

$$3x^2 - 3(y + x \cdot y') + 2y \cdot y' = 0$$

dvs $3x^2 - 3y - 3xy' + 2y \cdot y' = 0$

$$(2y - 3x)y' = 3y - 3x^2$$

$$y' = \frac{3y-3x^2}{2y-3x} = \frac{3(y-x^2)}{2y-3x}$$

Antar $x=2$ og løser (*) innsatt $x=2$

dvs $\quad 2^3 - 3\cdot 2\cdot y + y^2 = 0$

dvs $\quad y^2 - 6y = -8$

$$(y-3)^2 = -8+9 = 1$$

$y-3 = 1 \quad$ el. $\quad y-3 = -1$

$y = 4 \qquad\qquad y = 2$

Vi bruker ettpunktsformelen til å finne tangentfunksjonene i punktene $(2,4)$ og $(2,2)$ på kurven.

$(2,4) \qquad y' = \frac{3(4-2^2)}{2\cdot 4 - 3\cdot 2} = \frac{3\cdot 0}{2} = 0$

så tangentfunksjonen er konstant $h_1(x) = 4$

$(2,2) \qquad y' = \frac{3(2-2^2)}{2\cdot 2 - 3\cdot 2} = \frac{3\cdot(-2)}{(-2)} = 3$

Ettpunktsformelen gir

$$h_2(x) - 2 = 3(x-2)$$

dvs $\quad h_2(x) = 3x - 4$

Oppg. 2 Elliminasjon er strategien.

I oppg 1a, c og d er det to y-verdier for en x-verdi. Ingen av disse kan være den blå kurven (den til høyre), så

1b må derfor være den blå

Den røde (til venstre) og den grønne (nederst) er symmetrisk om horisontale linjer. Da er også to tangenter med samme x-verdi symmetriske, dvs har like stigningstall, bare med motsatt fortegn. Dette gjelder bare 1a og c. Dermed må 1d være den fiolette.

Hvis de tykke linjene i koordinatsystemet er koordinatakser vil den røde grafen gi en positiv og en negativ y-verdi for hver x-verdi, mens den grønne ikke gir negative y-verdier. Dermed er 1a den grønne og 1c den røde grafen

Skulle tegne inn tangentene.

fortsetter kl. 1604

MET1181 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2020
Oppgaver

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 14

tirsdag 3. nov. kl 15-16.45 (strømmes).

Kap 4.5, 4.7: Implisitt derivasjon. Den annenderiverte og konvekse/konkave funksjoner.

[L] **4.5** 1-3
[L] **4.7** 1-11

Flervalgseksamen 2016v oppg 15
Flervalgseksamen 2016h oppg 11
Flervalgseksamen 2017v oppg 11

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 5. nov. kl 10-15 på Zoom (det går an å sitte på D1-065/70 og CU1-067)

Oppgave 1 Uttrykk y' ved hjelp av y og x ved implisitt derivasjon. Finn alle løsninger for y gitt at $x = a$ og bestem funksjonsuttrykkene for tangentene i disse punktene.

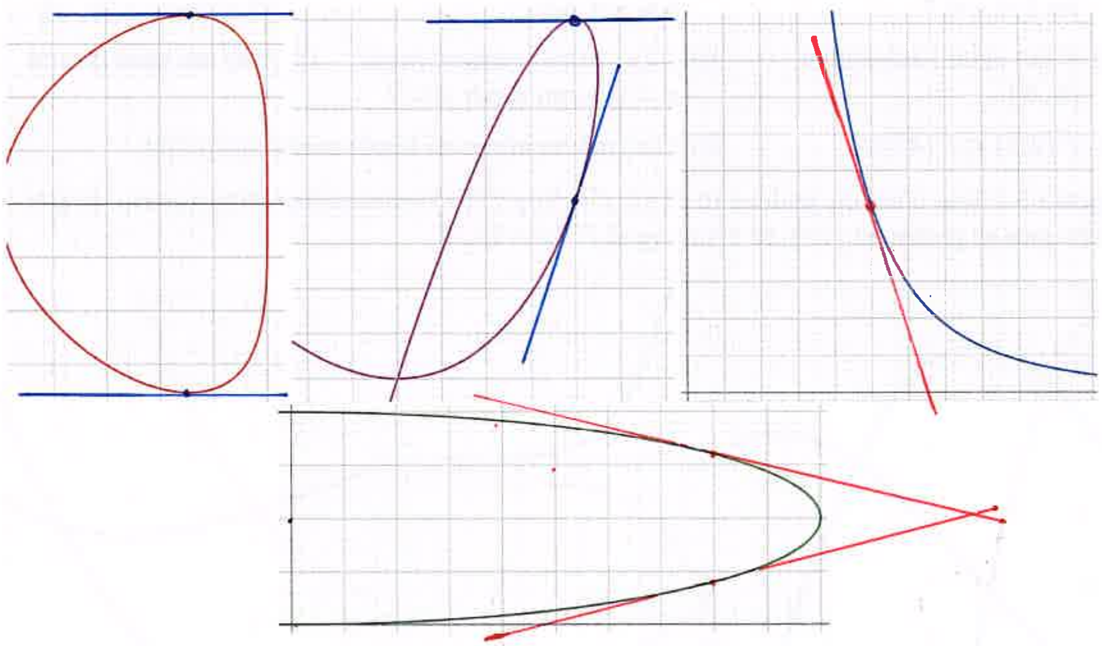
a) $x^2 + 25y^2 - 50y = 0$ og $a = 4$

b) $x^{3,27}y^{1,09} = 1$ og $a = 1$

c) $x^4 - x^2 + y^4 = 0$ og $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $x^3 - 3xy + y^2 = 0$ og $a = 2$

Oppgave 2 I figur 1 ser du grafene til de implisitt definerte kurvene i oppgave 1. Finn kurvene og likningene som hører sammen. Tegn også inn tangentene fra oppgave 1.



Figur 1: Fire implisitt definerte kurver

Oppg. 6b $\quad f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) - \frac{x}{4} + 1$

Merk $\quad x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$

så $f(x)$ er definert på hele tallinjen.

Kjerneregelen for $\left[\ln(x^2-2x+2)\right]'$:

$u = x^2 - 2x + 2 \qquad g(u) = \ln(u)$

$u'_x = 2x - 2 \qquad g'_u(u) = \frac{1}{u}$

$$f'(x) = (2x-2)\cdot\frac{1}{x^2-2x+2} - \frac{1}{4}\cdot 1 + 0$$

$$= \underline{\underline{\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{1}{4}}}$$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \frac{(2x-2)'\cdot(x^2-2x+2) - (2x-2)\cdot(x^2-2x+2)'}{(x^2-2x+2)^2} - 0$$

$$= \frac{2(x^2-2x+2) - (2x-2)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + 4 - (4x^2 - 8x + 4)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-2x^2+4x}{(x^2-2x+2)^2}}} = \frac{-2x(x-2)}{\left[(x+1)^2+1\right]^2}$$

Løser likningen $f''(x) = 0$

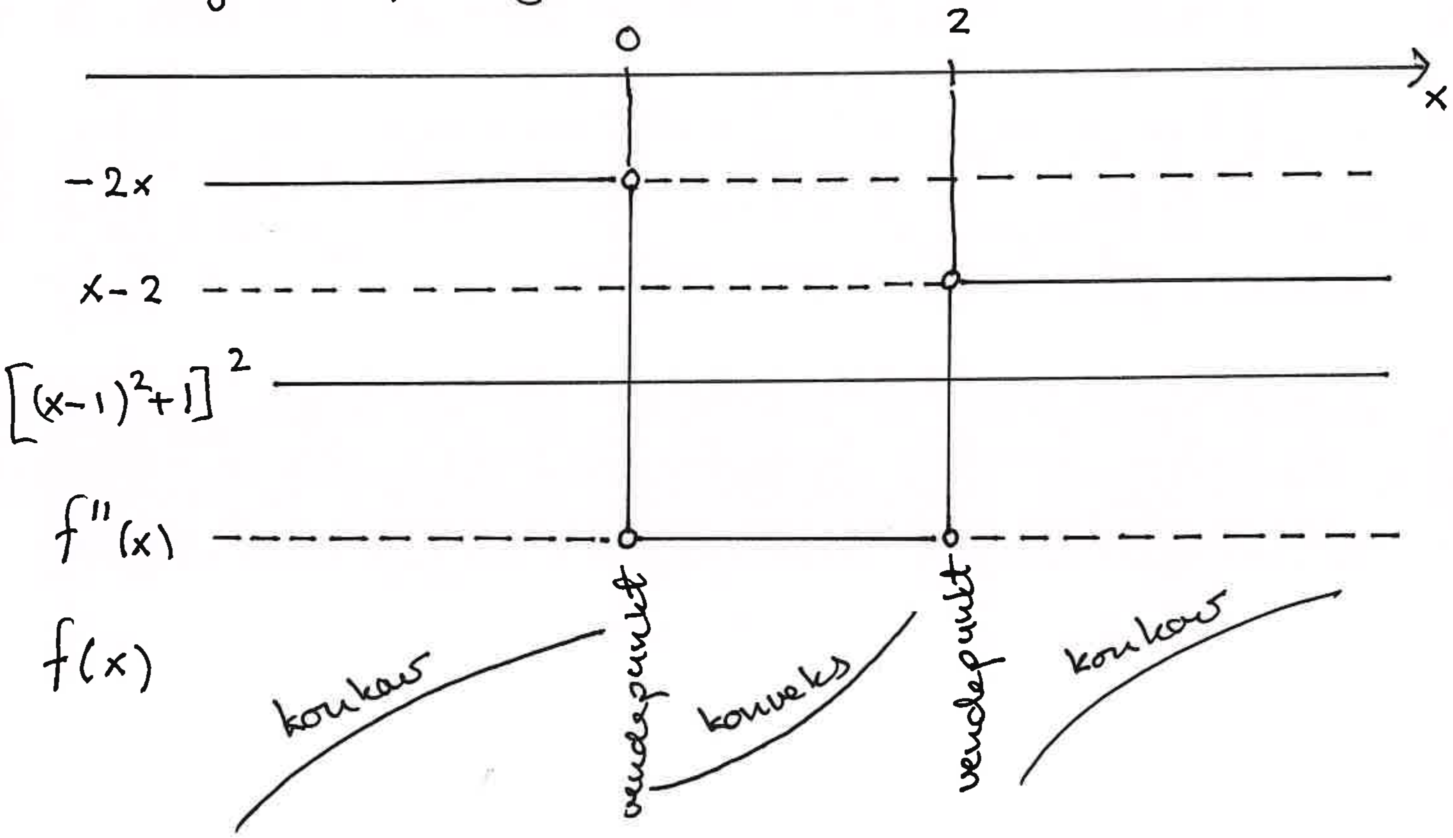
dvs $\quad -2x(x-2) = 0$

(fordi nevneren er ≥ 1)

dvs $\quad -2x = 0 \quad$ el. $\quad x - 2 = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$, $\underline{\underline{x = 2}}$

Skal finne hvor $f(x)$ er konveks/konkav, tegner fortegnsskjema for $f''(x)$.



<u>Konklusjon</u> $f(x)$ er konkav for $x \in \langle \leftarrow, 0]$
$f(x)$ er konveks for $x \in [0, 2]$
$f(x)$ er konkav for $x \in [2, \rightarrow\rangle$

Dermed er $\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = 2}}$ vendepunkter

(fordi $f''(x)$ skifter fortegn for $x = 0$ og $x = 2$)

Oppg 7b Vi bruker ettpunktsformelen $y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$ til å finne uttrykkene for vende tangent-funksjonene.

$$f'(0) = \frac{2\cdot 0 - 2}{0^2 - 2\cdot 0 + 2} - \frac{1}{4} = \frac{-2}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4} = -1{,}25$$

$$y_0 = f(0) = \ln(0^2 - 2\cdot 0 + 2) - \frac{0}{4} + 1 = \ln(2) + 1$$

Setter $y = h_0(x)$ og får likningen

$$h_0(x) - (\ln(2) + 1) = -1{,}25\cdot(x - 0)$$

så $\underline{\underline{h_0(x) = -1{,}25x + \ln(2) + 1}}$

$$f'(2) = \frac{2\cdot 2 - 2}{2^2 - 2\cdot 2 + 2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$y_0 = f(2) = \ln(2^2 - 2\cdot 2 + 2) - \frac{2}{4} + 1 = \ln(2) + 0{,}5$$

Setter $y = h_2(x)$. Ettpunktsformelen gir

$$h_2(x) - (\ln(2) + 0{,}5) = 0{,}75\cdot(x - 2)$$

så: $\underline{\underline{h_2(x) = 0{,}75x + \ln(2) - 1}}$

Oppg 5a Det enkleste er å vise at noe ikke er riktig.

(*) Antar at $f(x)$ er den fiolette (lengst til venstre)

Da er $f'(x)$ negativ for $0{,}6 \leq x \leq 1{,}3$

Men $f'(x)$ må da være en av de andre to grafene og ingen av disse er negative for $1 < x \leq 1{,}3$. Så antagelsen er gal!

(*) Antar at $f(x)$ er den grønne (den i midten)

Da er $f'(1,3) = 0$

$f'(x)$ må da være den fiolette (den røde har jo omtrent $y = 0,6$ for $x = 1,3$)

Da må $f''(x)$ være den røde, men det er ikke mulig fordi den fiolette har negative stigningstall mens den røde er positiv for $x > 1$.

Altså må $f(x)$ være den røde.

og siden den fiolette ikke kan være $f'(x)$ må $f'(x)$ være den grønne og $f''(x)$ være den fiolette