Plan

1 Lagranges multiplikatormetode
2 Degenerert bibetingelse

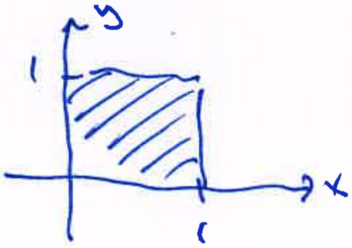
Ekstra forelesninger/veiledning:

Forelesning 32: Ons 26/05 10-13
Veiledning: Tors 27/05 kl 12-15
Forelesn. D: Fred. 28/05 kl 10-13

① Lagranges multiplikator metode

max/min $f(x,y) = \ln(xy+x+y+1)$ når $0 \le x,y \le 1$

D: $0 \le x,y \le 1$
tillatte pkt



① D kompakt (lukket og begrenset) $\xRightarrow{\text{ekstremverdisetn.}}$ det fins maks/min.

② Finne kandidat pkt:

i) Indre pkt for D: stasjonære pkt for f

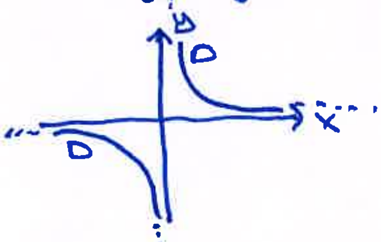
ii) Randpkt: alle

Lagrange problem: max/min-problem med bibetingelser, der alle bibetingelsene er likninger

$$\boxed{\text{max/min } f(x,y) \text{ når } g(x,y)=a}$$

Eks: max/min $f(x,y) = x^2+y^2$ når $xy=1$ (Lagrange problem)

D: $xy=1 \Rightarrow y = 1/x$
hyperbel



D er ikke kompakt (lukket, ikke begrenset) → Kan ikke bruke ekstremverdisetningen (kan være maks/min, men det er ikke sikkert)

Eks: max/min $f(x,y) = x^2 + y^2$ når $xy = 1 \leftarrow g(x,y) = a$, $g(x,y) = xy$, $a = 1$

$\boxed{y = 1/x}$

Innsettingsmetode:

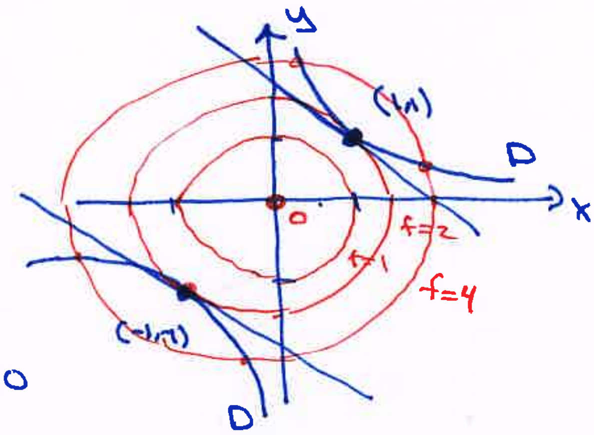
$f(x,y) = x^2 + y^2$

$= x^2 + (1/x)^2$

$= x^2 + 1/x^2, \; x \neq 0$

$\Downarrow$

max/min $\underline{f(x) = x^2 + 1/x^2}, \; x \neq 0$



$f'(x) = 2x + (-2)x^{-3} = 2x - \frac{2}{x^3}$

$= \frac{2x \cdot x^3}{x^3} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3}$

$= \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} = \frac{2(x^2-1)(x^2+1)}{x^3}$

$= \frac{2(x-1)(x+1)\cdot(x^2+1)}{x^3}$

Nivåkurver for f:

$f(x,y) = c$

$x^2 + y^2 = c$

$c > 0$: Sirkel, sentr (0,0), $r = \sqrt{c}$

$c = 0$: punkt (0,0)

$c < 0$: ingen punkt.

		-1		0		1		x
$2(x^2+1)$								
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^3	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	X	$-$	0	$+$	

$x=-1$ $\quad$ $x=1$

$\underline{x=1}$: $(x,y) = (1,1)$ $\quad f(1,1) = 2$

$\underline{x=-1}$: $(x,y) = (-1,-1)$ $\quad f(-1,-1) = 2$

$\Big\}$ $\underline{\text{Min}}$: $f = \underline{\underline{2}}$ i (1,1), (-1,-1)

$\underline{x \to \infty}$: $\lim_{x\to\infty} \underbrace{x^2 + 1/x^2}_{f(x)} = \infty$

~~Maksverdi~~

Ingen Maksverdi

Lagranges multiplikatormetode: $\boxed{\max/\min f(x,y) \text{ når } g(x,y)=a}$

max/min $f(x,y) = x^2+y^2$ når $g(x,y) = xy = 1 = a$

$xy = 1$

$xy - 1 = 0$

Lagrangefunksjonen: λ: Lagrange multiplikator

$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y)-a)$

$= x^2+y^2 - \lambda(xy-1)$

Lagrangebetingelsene:

$L'_x = 2x - \lambda y = 0$ } FOC (førsteordensbetingelsene)

$L'_y = 2y - \lambda x = 0$

$L'_\lambda = -(xy-1) = 0$ } C (bibetingelsen)

$-(xy-1) = 0 \quad | \cdot (-1)$

$xy - 1 = 0$

$xy = 1$

Lagrangebetingelser:

FOC $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \end{cases}$

C $\{ g(x,y) = a$

Lagrangebetingelsene i eks:

FOC $\begin{cases} L'_x = & 2x - \lambda y = 0 \\ L'_y = & 2y - \lambda x = 0 \end{cases}$

C $\{ \quad xy = 1$

$\to x = \frac{\lambda y}{2}$

$\to 2y - \lambda\left(\frac{\lambda y}{2}\right) = 0$

$2y - \frac{\lambda^2 y}{2} = 0 \quad | \cdot 2$

$4y - \lambda^2 y = 0$

$y(4-\lambda^2) = 0$

$y = 0$ eller $\lambda^2 = 4$

$y=0$ eller $\lambda = 2$ eller $\lambda = -2$

a) b) c)

Løser likningene $\Rightarrow$ kandidatpunkt $(x,y;\lambda)$ = stasjonære pkt for L

a) $y=0$: $xy=1$
$x\cdot 0=1$
umulig

ingen kandidater i a)

b) $\lambda=2$: $x=\frac{\lambda}{2}y=y$

$xy=1 \to y\cdot y=1$
$y^2=1$
$y=\pm 1$

Kandidater i b)

$(x,y;\lambda)=(1,1;2)$, $f(1,1)=2$
$(-1,-1;2)$ $f(-1,-1)=2$

c) $\lambda=-2$: $x=\frac{\lambda}{2}y=-y$

$xy=1 \to (-y)y=1$
$-y^2=1$
$y^2=-1$
umulig

Ingen kandidater i c)

Løsn. av Lagrangebetingelsene (stasjonære pkt for L) $\Rightarrow$ kandidat pkt for max/min

$(x,y;\lambda)=(1,1;2)$, $(-1,-1;2)$
$f=2$ $f=2$

Resultat: (Nødvendig betingelse i Lagrangeproblem)

Hvis (x^*,y^*) er løsning (max/min) i et Lagrangeproblem, og (x^*,y^*) ikke har degenerert bibetingelse, så fins λ^* slik at $(x^*,y^*;\lambda^*)$ oppfyller Lagrangebetingelsene (FOC+C).

(2) **Defn:** Vi sier at (x^*,y^*) er et tillatt pkt med degenerert bibetingelse hvis følgende er oppfylt:

$$\boxed{\begin{aligned} g'_x(x^*,y^*)&=0\\ g'_y(x^*,y^*)&=0\\ g(x^*,y^*)&=a \end{aligned}}$$

Eks: $xy=1$ $\quad (g(x,y)=xy,\ a=1)$

$$\boxed{\begin{aligned} g'_x=y&=0\\ g'_y=x&=0\\ xy&=1 \end{aligned}}$$

$y=0$
$x=0$
$\Downarrow$
$0\cdot 0\neq 1$

Ingen tillatte pkt med degenerert bibetingelse i eks.

Oppsummering:

Kondisjoner for max/min i et Lagrangeproblem

$\underset{\min}{\max}\ f(x,y)$ når $g(x,y)=a$

$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda\cdot(g(x,y)-a)$

i) Stasjonære pkt for $\mathcal{L}$ = løsninger av Lagrangebetingelse

Generelt:	Eks:
$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ g(x,y)=a \end{array}}$	$(1,1;2)$, $f=2$ $(-1,-1;2)$ $f=2$

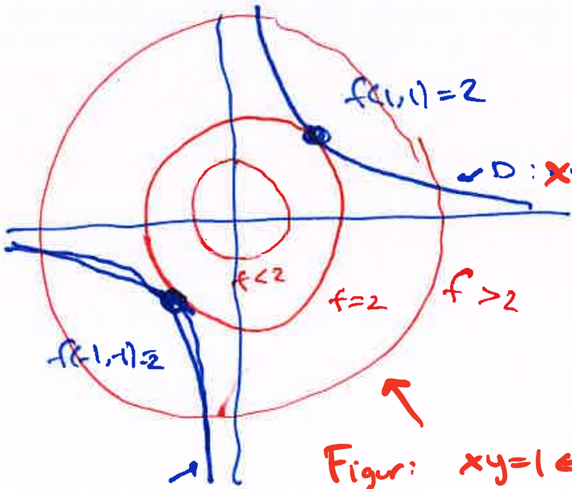
ii) Tillatte pkt med degenerert bibetingelse

Generelt:	Eks:
$\boxed{\begin{array}{l} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \\ g(x,y)=a \end{array}}$	ingen

Det gjenstår å se hvordan vi kan avgjøre om $f=2$ er maks, min, eller ingen av delene

i) Ekstremverdisetningen
ii) Innsettingsmetoden eller figur.

(fra tidligere regning med innsettingsmetoden, vet vi at $f(1,1)=f(-1,-1)=2$ er min, og det fins ikke max.)



Innsettingsmetoden:
$xy=1 \Rightarrow y=1/x$
$f(x,y) = f(x,1/x) = x^2 + 1/x^2$
fortegnsskjema for f'

Figur: $xy=1 \Leftrightarrow D$ blå kurver
nivåkurver for f røde kurver

Del 2: Oppgaveark 30

1e), 2e) max $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $x^2+y^2=16$ i)

$=$ max x^2y^2 når $x^2+y^2=16$ ii)

ii) $\mathcal{L} = x^2y^2 - \lambda(x^2+y^2-16)$

FOC
$$\mathcal{L}'_x = 2xy^2 - \lambda\cdot 2x = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = 2x^2y - \lambda\cdot 2y = 0$$
$$x^2+y^2 = 16$$
C

$2x(y^2-\lambda)=0$ $\quad x=0$ eller $\lambda=y^2$

$2y(x^2-\lambda)=0$ $\quad y=0$ " $\lambda=x^2$

i) $x=0, y=0$: $0^2+0^2 \neq 16$ ingen løsn

ii) $x=0, \lambda=x^2$: $x=0$, $\lambda=0$, $0^2+y^2=16$, $y^2=16$, $y=\pm 4$ $\quad (0,\pm 4;0)$, $f=0$

iii) $\lambda=y^2, y=0$: $y=0, \lambda=0$, $x^2+0^2=16$, $x=\pm 4$ $\quad (\pm 4, 0; 0)$, $f=0$

iv) $\lambda=y^2, \lambda=x^2$: $x^2=y^2$, $2x^2=16$, $x^2=8$, $x=\pm\sqrt{8}$ $\quad (\pm\sqrt{8},\pm\sqrt{8};8)$, $f=64$

Tillatte pkt med degenerert betingelse:

$g = x^2+y^2$

$g'_x = 2x = 0 \quad x=0$

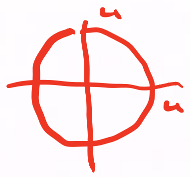
$g'_y = 2y = 0 \quad y=0$

$x^2+y^2=16 \quad 0^2+0^2 \neq 16$

ingen pkt

2e) Er $f(\pm\sqrt{8},\pm\sqrt{8}) = 8$ globalt max ?

D: $x^2+y^2=16$ sirkel $r=4$ $\Rightarrow$ kompakt $\Rightarrow$ EVS $\Rightarrow$ det fins et maks $\Rightarrow$ $f_{max} = 64$ i $(\pm\sqrt{8},\pm\sqrt{8})$



1f), 2f) max $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $xy=4$ i)

$=$ max $32 - x^2 - y^2$ når $xy=4$ ii)

$\mathcal{L} = 32 - x^2 - y^2 - \lambda(xy-4)$

$$\mathcal{L}'_x = -2x - \lambda y = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = -2y - \lambda x = 0$$
$$xy = 4$$

$x = -\frac{\lambda y}{2}$

$-2y - \lambda\left(-\frac{\lambda y}{2}\right) = 0 \quad |\cdot 2$

$-4y + \lambda^2 y = 0$

$y(\lambda^2-4)=0$

$y=0$ eller $\lambda^2=4$

$y=0$ (a), $\lambda=2$ (b), $\lambda=-2$ (c)

a) $y=0$: $xy \neq 4$ ingen pkt

b) $z=2$: $x=-y$ $\quad -y \cdot y = 4 \quad y^2=-4$ ingen pkt

c) $z=-2$: $x=y$ $\quad y \cdot y = 4 \quad y^2=4 \quad y=\pm 2$ $\quad (2,2;-2)$, $(-2,-2;-2)$

$f=24 \qquad f=24$

Degenerert b.betingelse:

$g = xy = 4$

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= y = 0 \\ g'_y &= x = 0 \\ xy &= 4 \end{aligned}\right\}$$ ingen tillatte pkt m/degen. bibet.

2f) Er $f_{max} = 24$?

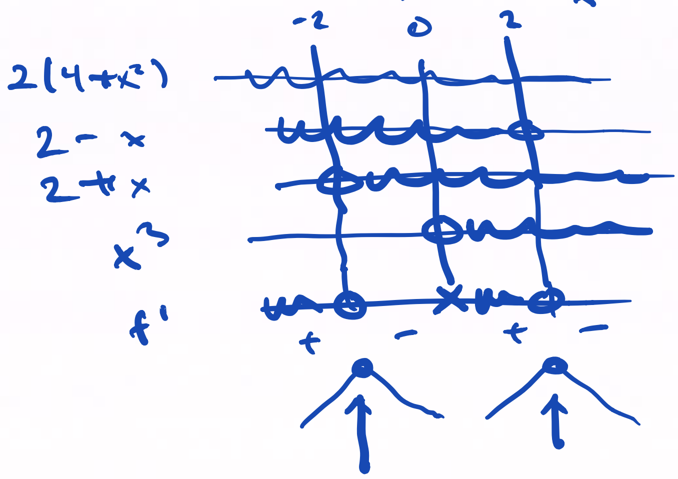
Innsettingsmetoden: $xy=4 \Rightarrow y = 4/x$

$$f(x,y) = 32 - x^2 - y^2 = 32 - x^2 - (4/x)^2$$

$$f(x) = 32 - x^2 - 16/x^2, \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = -2x - 16 \cdot (-2) x^{-3} = -2x + 32/x^3$$

$$= \frac{-2x \cdot x^3}{x^3} + \frac{32}{x^3} = \frac{2(16-x^4)}{x^3} = \frac{2(4+x^2)(2+x)(2-x)}{x^3}$$



$x=-2$ $\qquad$ $x=2$

$(-2,-2)$ $\qquad$ $(2,2)$

$f=24$ $\qquad$ $f=24$

Ser fra fortegnsskjema for f' at disse pkt. gir max

3. max $U = 0.3 \ln(x-3) + 0.7 \ln(y-2)$ når $12x + 5y = 60$

$L = 0.3 \ln(x-3) + 0.7 \ln(y-2) - \lambda(12x + 5y - 60)$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= \frac{0.3}{x-3} - \lambda \cdot 12 = 0 \\ L'_y &= \frac{0.7}{y-2} - \lambda \cdot 5 = 0 \\ & 12x + 5y = 60 \end{aligned}}$$

$$12\lambda = \frac{0.3}{x-3} \quad \cdot 5$$

$$5\lambda = \frac{0.7}{y-2} \quad \cdot 12$$

$$60\lambda = \frac{1.5}{x-3} = \frac{8.4}{y-2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{5y}{5} = \frac{60 - 12x}{5}$$

$$y = 12 - 2.4x$$

$$1.5(y-2) = 8.4(x-3)$$

$$1.5y - 3 = 8.4x - 25.2$$

$$1.5(12 - 2.4x) - 3 = 8.4x - 25.2$$

$$18 - 3.6x - 3 = 8.4x - 25.2$$

$$\frac{12x}{12} = \frac{40.2}{12}$$

$$\begin{cases} x = 3.35 \\ y = 3.96 \end{cases}$$

Tolkning av λ: Neste gang.

(For å vise at dette er maks: bruk innsettingsmetoden med $y = \frac{60-12x}{5} = 12 - 2.4x$)

$$12\lambda = \frac{0.3}{0.35} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{14} \simeq 0.071$$

4. Degenerert bibetingelse:

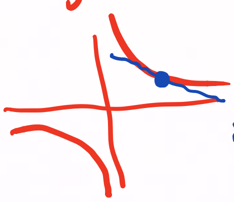
$g(x,y) = a$ har degenerert bibetingelse i et tillatt pkt hvis $g'_x = g'_y = 0$

$$\Updownarrow$$

Kurven $g(x,y) = a$ har ikke entydig tangent i pkt.

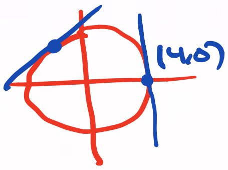
$$g(x,y) = a: \quad y' = -\frac{g'_x}{g'_y}$$

Eks: $xy = 4$ $\quad y = 4/x$



ikke degenerert bibetingelse

$x^2 + y^2 = 16$



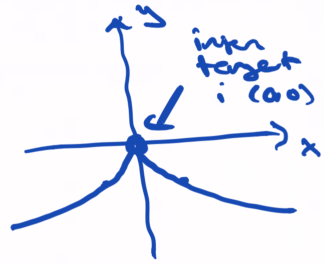
$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$y'(4,0) = -\frac{4}{0} = \pm\infty$$

Eks: $\boxed{\max\ f(x,y)=y \quad \text{når} \quad x^2+y^3=0}$ ✓

$y^3=-x^2$

$y=-\sqrt[3]{x^2}$



$f(0,0)=0$

$f(x,y)<0$

$\Downarrow$

(0,0) er maxpkt

$g=x^2+y^3$

$g'_x=2x=0 \Rightarrow x=0$

$g'_y=3y^2=0 \Rightarrow y=0$

$x^2+y^3=0 \quad 0^2+0^3=0$ ok

$(0,0)$ et tillatt pkt med degenerert bibetingelse

$y'(0,0)=-\dfrac{2\cdot 0}{3\cdot 0^2}=\dfrac{0}{0}$

ett "unntakspkt" (0,0)

$\mathcal{L}=y-\lambda(x^2+y^3)$

$\mathcal{L}'_x = -\lambda\cdot 2x=0$

$\mathcal{L}'_y = 1-\lambda\cdot 3y^2=0$

$x^2+y^3=0$

$\lambda=0$ eller $x=0$

$1-0=0$ umulig ingen pkt. | $y^3=0$, $y=0$, $1-0=0$ umulig ingen pkt

ingen "vanlige" kandidatpkt

7. $\max\ f(x,y)=x+y$ når $x^3-3xy+y^3=0$

Antar at pb. har et maksimum

$\mathcal{L}=x+y-\lambda(x^3-3xy+y^3)$

$\mathcal{L}'_x = 1-\lambda\cdot(3x^2-3y)=0$

$\mathcal{L}'_y = 1-\lambda(-3x+3y^2)=0$

$x^3-3xy+y^3=0$ ✓

$(3x^2-3y)\cdot\lambda=1 \quad (\lambda\neq 0) \Rightarrow 3x^2-3y=\frac{1}{\lambda}$

$(-3x+3y^2)\cdot\lambda=1 \quad = \quad 3y^2-3x=\frac{1}{\lambda}$

$\Downarrow$

$3x^2-3y=3y^2-3x \quad |:3$

$x^2-y=y^2-x$

$x^2-y^2=y-x$

$(x-y)(x+y)=-1(x-y)$

$(x-y)(x+y)+(x-y)=0$

$(x-y)(x+y+1)=0$

$x=y$ eller $x+y+1=0$

a) $y=x$ eller b) $y=-1-x$

a) $x^3-3x\cdot x+x^3=0 \qquad \frac{1}{\lambda}=(3x^2-3y)$

$2x^3-3x^2=0$

$x^2(2x-3)=0$

$x=0$ eller $x=3/2$

~~$y=0$, $\frac{1}{\lambda}=0$ umulig~~ | $y=3/2$

$\frac{1}{\lambda}=3\cdot(3/2)^2-3\cdot(3/2)$

$=\frac{27}{4}-\frac{9\cdot 2}{2\cdot 2}=9/4$

$\lambda=4/9$

$(3/2, 3/2; 4/9) \quad f=3$

b) ingen pkt.

b) $x^3 - 3xy + y^3 = 0 \longleftarrow y = -1-x$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$x^3 - 3x(-1-x) + (-1-x)^3 = 0$

$\cancel{x^3} + \cancel{3x} + \cancel{3x^2} - (1 + \cancel{3x} + \cancel{3x^2} + \cancel{x^3}) = 0$

$-1 = 0$

umulig

Tillatte pkt m/ degen. b.bet:

$\underbrace{x^3 - 3xy + y^3}_{g(x,y)} = 0$: $\boxed{\begin{array}{l} g'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ g'_y = -3x + 3y^2 = 0 \\ x^3 - 3xy + y^3 = 0 \end{array}}$

$\Downarrow$

$(0,0)$ $f = 0$

$y = x^2$, $x = y^2$

$x = (x^2)^2 = x^4$

$x - x^4 = 0$

$x(1 - x^3) = 0$

$(0,0), (1,1) \Longleftarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ eller $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

ok $\quad -1 \neq 0$

Hvis det fins et maks, så er $f_{max} = 3$: $(3/2, 3/2)$