MET 1181, 3. forelesning, 31. aug 2020, Runar Ile

Plan: 1. Nåverdier av kontantstrømmer

2. Rekker

3. Annuiteter

1. Nåverdier av kontantstrømmer

Nåverdi av et beløp (K) betalt n år (terminer) fra nå med en gitt rente r

= det du må sette i banken i dag (K_0) for å få K om n år hvis renten er r.

Fordi $K = K_0 \cdot (1+r)^n$ så er

nåverdien $K_0 = \dfrac{K}{(1+r)^n}$

Eks 50000 (K) om 3 år med 4% rente har nåverdi

$$K_0 = \frac{50000}{1{,}04^3} = \underline{\underline{44\,449.82}}$$

Dvs: Hvis du setter 44449,82 inn på konto i dag med 4% rente får du 50000 på konto om 3 år.

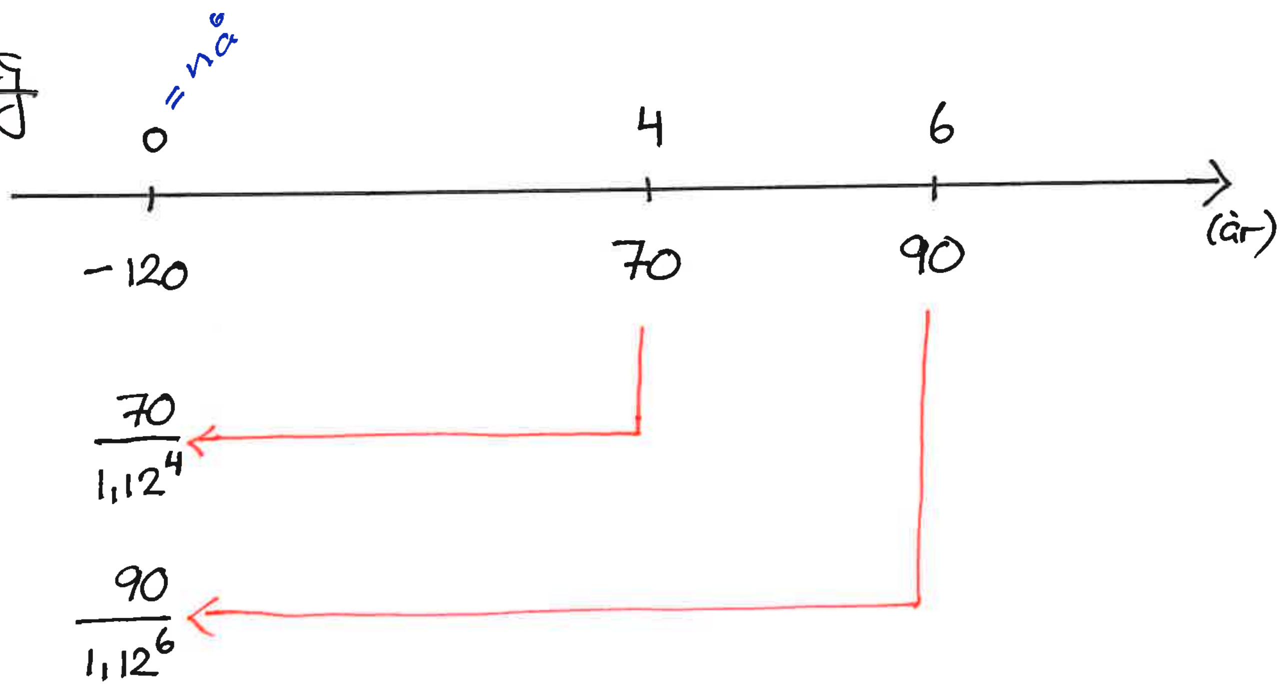
Eks En investering på 120 mill skal gi utbetalinger på 70 mill om 4 år og 90 mill om 6 år. Anta renten er 12 %.

a) Bestem nåverdien til kontantstrømmen.

b) Vurdér om dette er en god investering.

Løsning

a)



= nåverdien av kontantstrømmen

$$= -120 + \frac{70}{1{,}12^4} + \frac{90}{1{,}12^6} = \underline{\underline{-29{,}92}}$$

b) Man får ikke 12 % på denne investeringen.

Faktisk er (prøver, plotter, el.) internrenten til kontantstrømmen (tilnærmet) 5,81 %

fordi $-120 + \frac{70}{1{,}0581^4} + \frac{90}{1{,}0581^6} = 0{,}0$

5,81 % kan tolkes som årlig avkastning på denne investeringen.

2. Rekker

– lange addisjonsstykker.

Eks $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{100}$ er en rekke med 10 ledd.

= et ledd

Vi skriver $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$

tredje ledd

10-ende ledd

Geometriske rekker $a_1 + a_2 + \dots + a_n$

der hvert ledd er k ganger det foregående (k er et tall!):

$$a_2 = k \cdot a_1 ,$$

$$a_3 = k \cdot a_2 = k \cdot k \cdot a_1 = k^2 a_1$$

$$a_4 = k \cdot a_3 = k \cdot k^2 a_1 = k^3 a_1$$

Vi kan finne et uttrykk for denne summen:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + k \cdot a_1 + k^2 a_1 + k^3 a_1 + \dots + k^{n-1} a_1$$

$$= a_1 \underbrace{(1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^{n-1})}_{\frac{k^n - 1}{k - 1}}$$

$$= a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Oppgave Beregn summen

$$5 + 5 \cdot 1{,}003 + 5 \cdot 1{,}003^2 + 5 \cdot 1{,}003^3 + \ldots + 5 \cdot 1{,}003^{60}$$

Løsning: Dette er en geometrisk rekke med

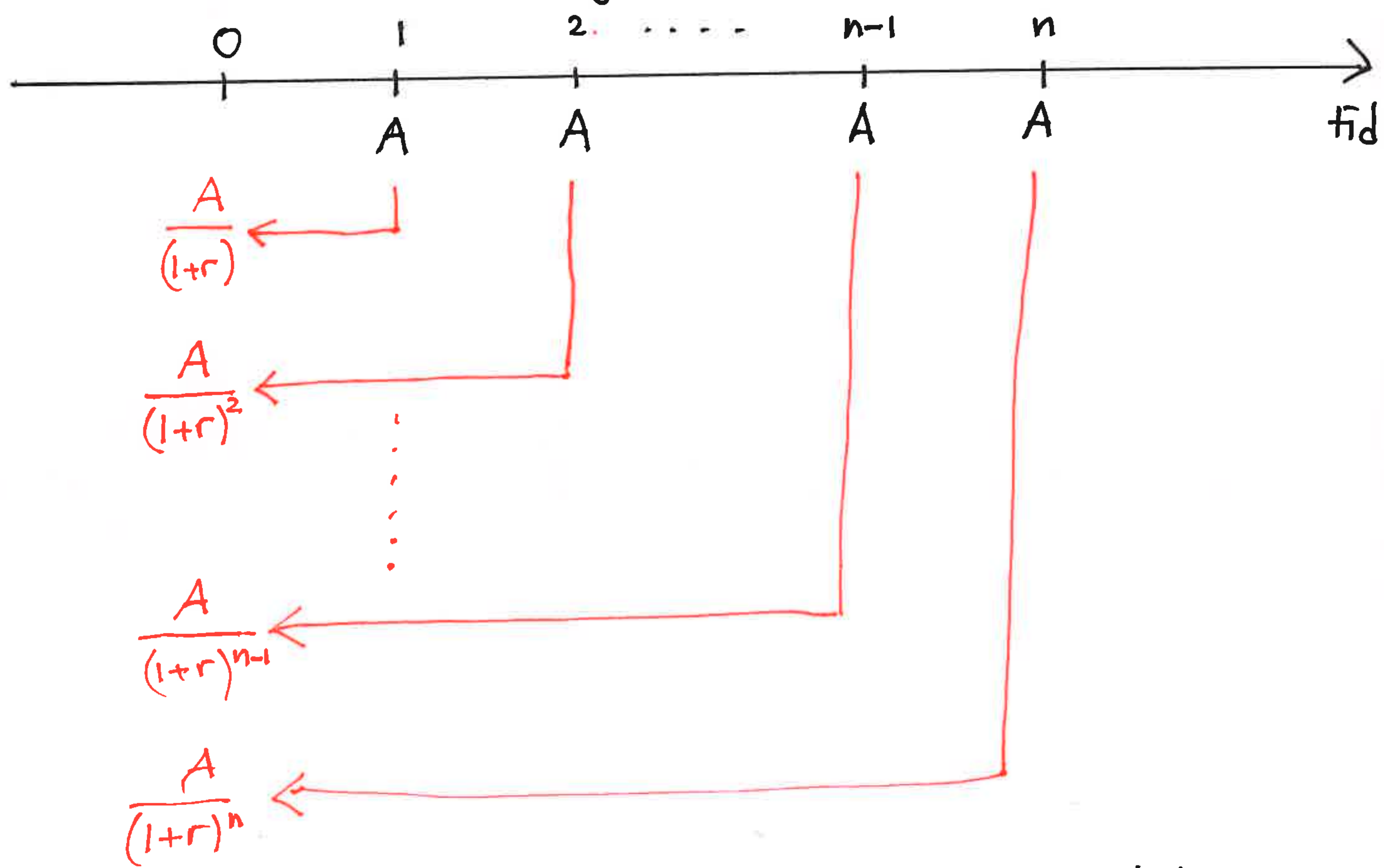
$k = 1{,}003$, $a_1 = 5$ og $n = 61$

Da er summen $5 \cdot \dfrac{1{,}003^{61} - 1}{1{,}003 - 1} = 5 \cdot \dfrac{1{,}003^{61} - 1}{0{,}003}$

$= \underline{\underline{334{,}14}}$

---

4. Annuiteter – jevne kontantstrømmer



Summen er nåverdien til den jevne kontantstrømmen

Dette er en geometrisk rekke med

$a_1 = \dfrac{A}{1+r}$, $n = n$ (ledd i rekken) , $k = \dfrac{1}{1+r}$

og summen er da $\dfrac{A}{(1+r)} \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+r} - 1}$

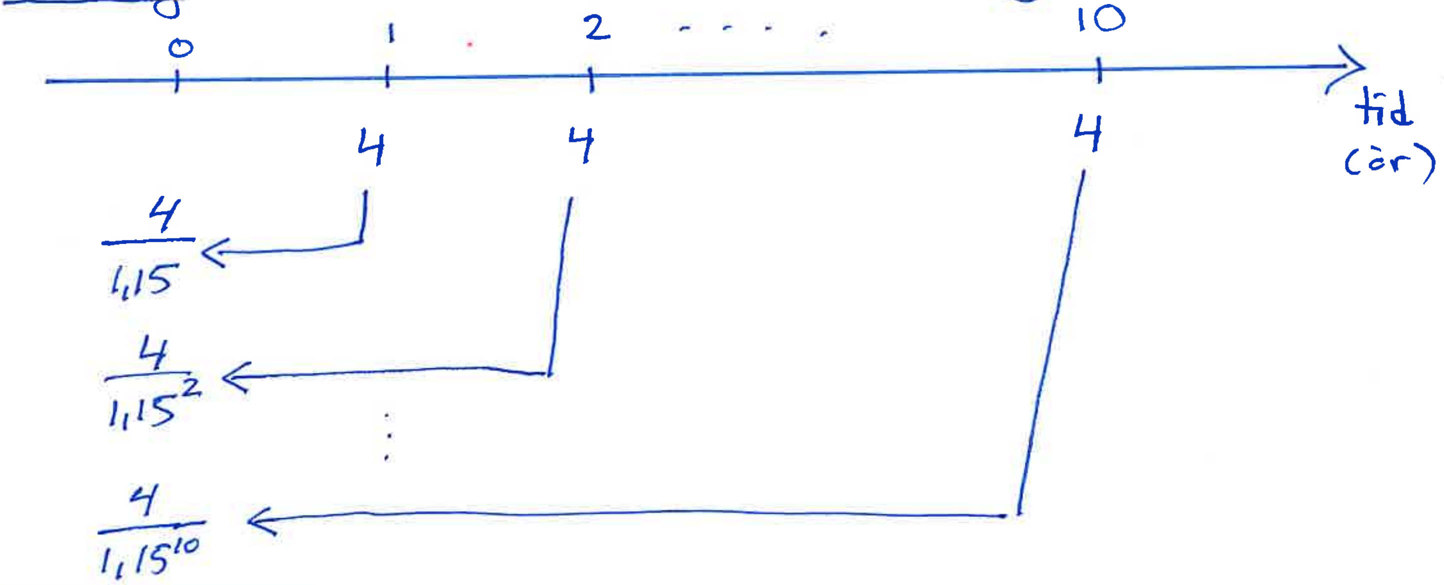
Men summen er også en geometrisk rekke den andre veien. Nå med

$$a_1 = \frac{A}{(1+r)^n}, \quad n \text{ ledd}, \quad k = 1+r$$

og summen er $$\frac{A}{(1+r)^n} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

<u>Oppgave</u> Hege vurderer en investering hvor det skal betales ut 4 mill hvert år i 10 år. Første utbetaling er om ett år. Anta diskonteringsrenten er 15%. Hva er en balansert pris i dag for denne betalingsstrømmen?

<u>Løsning</u> Vi finner nåverdien til betalingsstrømmen.



= nåverdien til kontantstrømmen. En geom. rekke med $a_1 = \frac{4}{1,15^{10}}$, $k = 1,15$, $n = 10$ og formelen gir

$$\frac{4}{1,15^{10}} \cdot \frac{1,15^{10} - 1}{0,15} = \underline{\underline{20,08}}$$

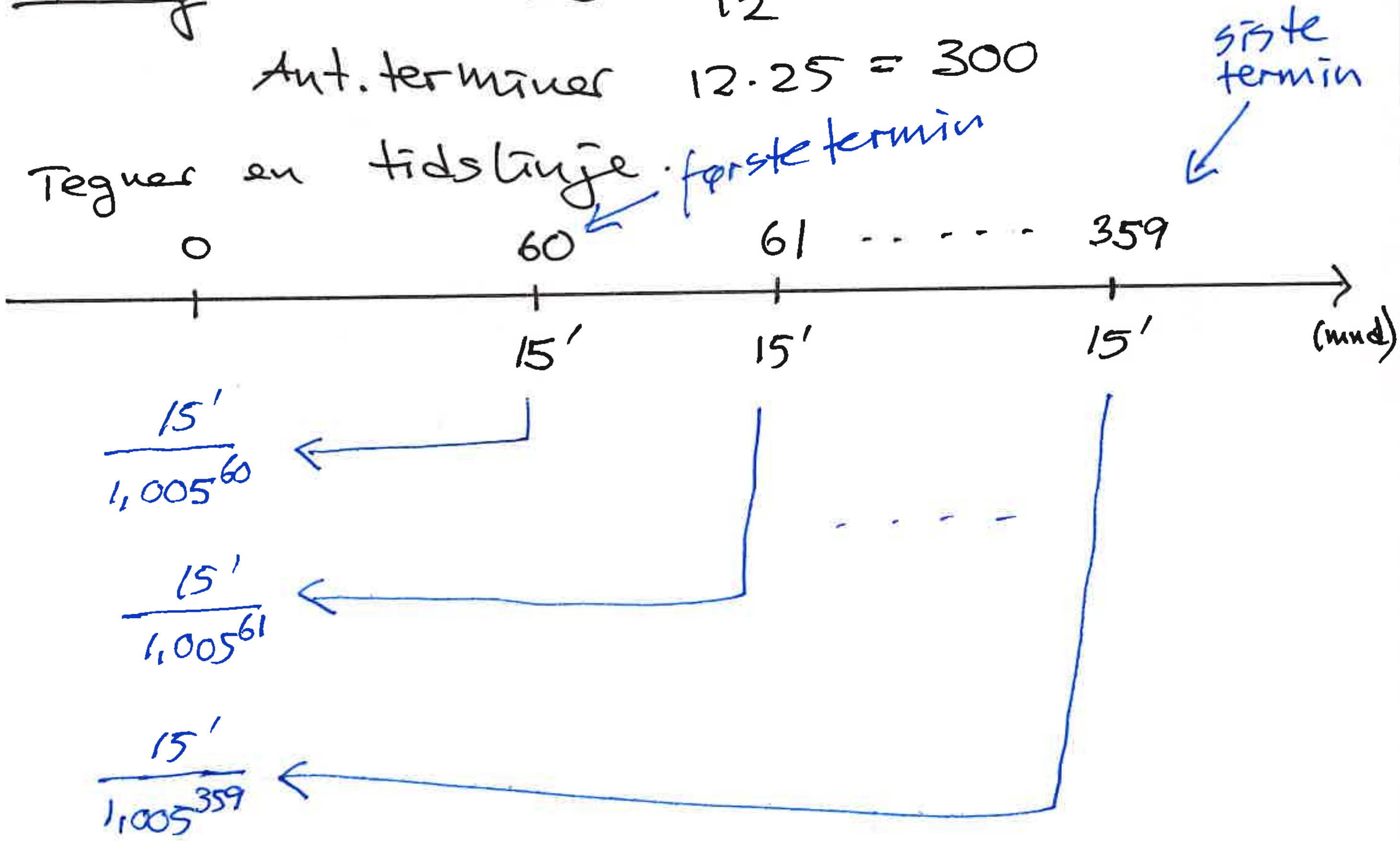
Eks (Fagoppg 2019 h, oppg 6a)

Kåre vurderer et boliglån med månedlige terminer over 25 år. Han regner med å kunne betale 15000 per måned. Første termin er om 5 år. Renten er 6% med månedlig forrentning.
Finn den geometriske rekken som gir nåverdien til kontantstrømmen, Beregn hvor mye Kåre kan låne.

Løsning Månedsrente $\frac{6\%}{12} = 0,5\%$

Ant. terminer $12 \cdot 25 = 300$

Tegner en tidslinje.



summen er en geom. rekke

$a_1 = \frac{15'}{1,005^{359}}$, $k = 1,005$, $n = 300$

Nåverdien (lånebeløp): $\frac{15000}{1,005^{359}} \cdot \frac{1,005^{300} - 1}{0,005} = \underline{1734620,76}$