Plan

1 Stasjonære punkter
2 Annenderivert-testen
3 Globale maksimum og minimum

① Stasjonære pkt (kritiske punkt)

Defn: Et stasjonært pkt for en funksjon $f(x,y)$ er et pkt der $\left\{ \begin{array}{l} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{array} \right\}$ ← førsteordens-betingelser (FOC)

Eks: $f(x,y) = x^2-2x+y^2+4y$

$f'_x = 2x-2 = 0 \qquad x=1$

$f'_y = 2y+4 = 0 \qquad y=-2$

Stasjonære pkt: $(x,y) = (1,-2)$

Eks: $f(x,y) = x^3+3xy+y^3$

$f'_x = 3x^2+3y = 0$

$f'_y = 3x+3y^2 = 0$

Stasjonære pkt: $(x,y) = (0,0), (-1,-1)$

$\boxed{\begin{array}{l} x^2+y=0 \\ x+y^2=0 \end{array}}$

$y=-x^2$

$x+(-x^2)^2=0$

$x+x^4=0$

$x(1+x^3)=0$

$x=0$ eller $1+x^3=0$

$x=0$: $y=0$ ⇓ $(0,0)$

$1+x^3=0$: $x^3=-1$, $x=\sqrt[3]{-1}=-1$, $y=-1$ ⇓ $(-1,-1)$

Resultat:

Hvis (x^*, y^*) er et maksimum eller minimum for for funksjonen $f(x,y)$. Da har vi enten:

i) (x^*, y^*) er et stasjonært punkt.

ii) (x^*, y^*) er et punkt hvor enten f'_x eller f'_y ikke er definert

iii) (x^*, y^*) er et randpunkt i D_f

Defn: Et kritisk punkt for f er et punkt som enten er et stasjonært punkt for f, eller et punkt der f'_x eller f'_y ikke fins.

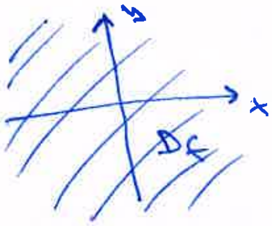
Eks: $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$, $D_f = \mathbb{R}^2$

i) Stasjonære punkt: $f'_x = 3x^2 + 3y = 0$ $\rightarrow$ $(x,y) = (0,0), (-1,-1)$

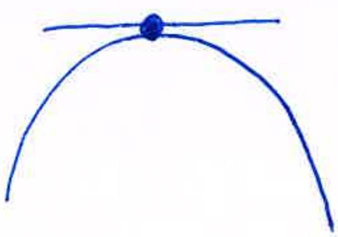
$f'_y = 3x + 3y^2 = 0$

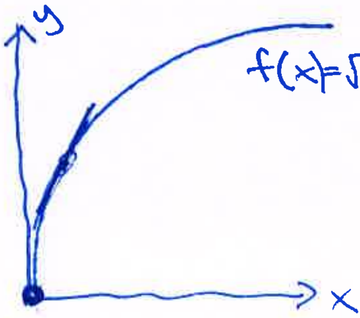
ii) ingen punkt. hvor f'_x eller f'_y ikke fins

iii) $D_f = \mathbb{R}^2$



ingen randpunkt for D_f.





$f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

$D_f = [0, \rightarrow)$

$x=0$ er randpunkt for f.

$f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ikke definert for $x=0$.

$x=0$ er kritisk punkt.

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $D_f = \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ ingen randpkt

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x \\ f'_y &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_y \end{aligned}} = \sqrt{u}, \quad u = x^2+y^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x &= \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f'_y &= \frac{2y}{2\sqrt{u}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{aligned}} \quad \text{FOC}$$

$$\Downarrow$$

$x=0$, $y=0$

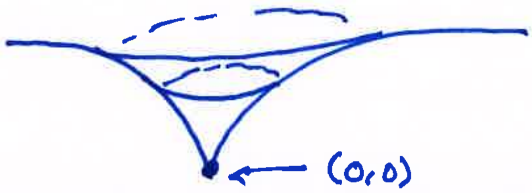
ikke stasjonært pkt. pga null i nevner

pkt hvor f'_x eller f'_y ikke fins:

$(x,y) = (0,0)$

Konklusjon: Kandidat for max/min $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$:

$(x,y) = (0,0)$, med $f(0,0) = 0$

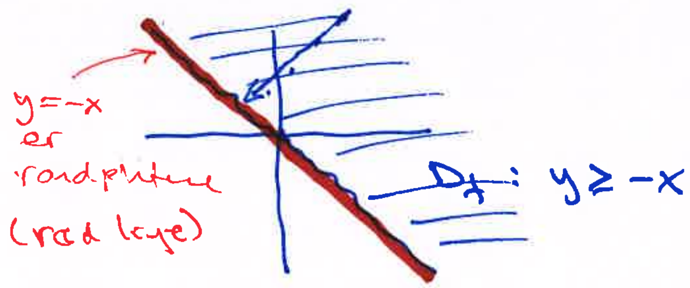


Eks: $f(x,y) = \sqrt{x+y}$, $D_f = \{(x,y) : x+y \geq 0\}$

$x+y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x$

Randpkt:

alle pkt. på linjen $x+y=0$



2 Andrederivert-testen

Eks: $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

$f'_x = 3x^2 + 3y = 0$

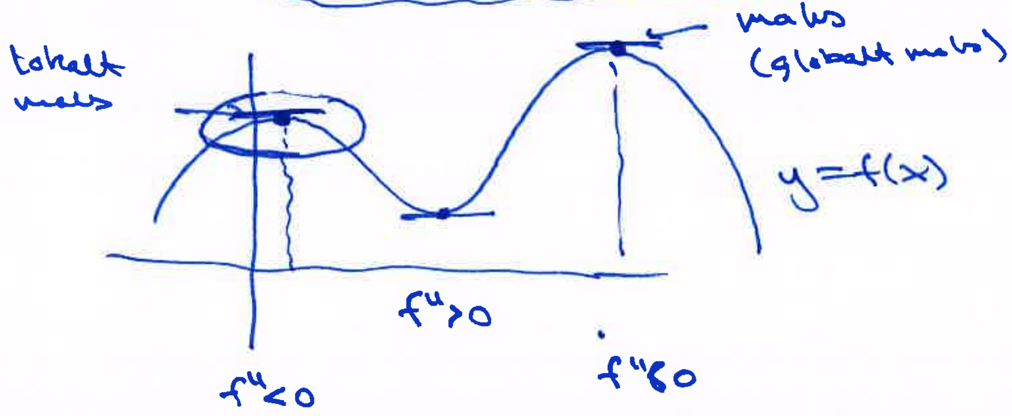
$f'_y = 3x + 3y^2 = 0$ $\longrightarrow$

Kandidat for maks/min
=
Stasjonære pkt: $(x,y) = (0,0), (-1,-1)$

Defn: (x^*, y^*) er maks. (globalt maks.) for f hvis $f(x^*, y^*) \geq f(x,y)$ for alle (x,y) i Df.

(x^*, y^*) er lokalt maks for f hvis $f(x^*, y^*) \geq f(x,y)$ for alle pkt (x,y) i nærheten av (x^*, y^*)

Tilsvarende for minimum.



Defn: Et stasjonært pkt (x^*, y^*) for f som hverken er lokalt maks eller lokalt min, så kalles det et sadelpkt.

Andrederivert-testen:

Anta at (x^*,y^*) er et stasjonært pkt for f.

Vi ser på matrisen

$$H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{xy}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

og regner ut:

$$\det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2$$
$$\operatorname{tr} H(f)(x^*,y^*) = A + C$$

Da har vi:

i) $AC-B^2>0$, $A+C>0$ $\Rightarrow$ (x^*,y^*) er lokalt min

ii) $AC-B^2>0$, $A+C<0$ $\Rightarrow$ (x^*,y^*) er lokalt maks

iii) $AC-B^2<0$ $\Rightarrow$ (x^*,y^*) er sadelpkt

Eks. (fortsatt) Stasjonære pkt: $(0,0)$, $(-1,-1)$

$f'_x = 3x^2+3y$

$f'_y = 3x+3y^2$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

a) $(x,y)=(0,0)$: $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\det = \underbrace{0^2-3^2}_{AC-B^2} = -9<0$

$\Downarrow$

$(0,0)$ er sadelpkt

b) $(x,y)=(-1,-1)$: $H(f)(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \det = 36-9=27>0 \\ \operatorname{tr} = -12<0 \end{array}\right\} \quad (-1,-1) \text{ er lokalt maks}$$

Kommentarer til testen:

i) $AC - B^2 = 0$: Testen er ikke i stand til å avgjøre hva slags punkt vi har.

ii) $AC - B^2 > 0$: $A + C > 0$, $A + C < 0$ er de eneste mulighetene

$$A + C = 0$$
$$\Downarrow$$
$$C = -A$$
$$\Downarrow$$
$$AC - B^2 > 0$$
gir
$$A(-A) - B^2 > 0$$
$$-A^2 - B^2 > 0$$
umulig

(3) Globale maks/min

Eks: (fortsatt)

$f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

Kandidat for maks/min:

$(x,y) = (0,0)$, $(-1,-1)$

Sadelpkt $f(0,0) = 0$ lokalt maks $f(-1,-1) = 1$

Globalt min: f har ikke globalt minimum

Globalt maks: $(-1,-1)$ kan være globalt maks, men det må undersøkes nærmere

Spørsmål: finnes det pkt med $f(x,y) > 1$?

$f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

$y=0$: $f(x,0) = x^3$

$f(2,0) = 8 > 1$

Konklusjon: f har ikke globalt maks

Del 2.

Mer forklaring av andrederivert-testen

(x^*, y^*) stasjonært pkt for f

$$H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{xy}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

det $= AC - B^2$

tr $= A + C$

i) $AC - B^2 > 0,\ A + C > 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ lokalt min

ii) $AC - B^2 > 0,\ A + C < 0$ lokalt max

iii) $AC - B^2 < 0$ sadelpkt

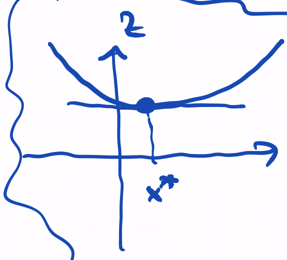
$AC - B^2 = 0$: Ingen konklusjon fra testen
$\Rightarrow$ Bruk definisjon

$AC - B^2 > 0$: dekker alle tilfeller

$AC > B^2 \geq 0 \Rightarrow AC > 0$

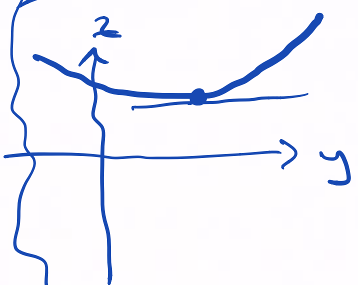
$$\Rightarrow \begin{cases} A > 0,\ C > 0 \Leftrightarrow A + C > 0 \\ \quad \text{eller} \\ A < 0,\ C < 0 \Leftrightarrow A + C < 0 \end{cases}$$

Eks: $AC - B^2 > 0$
$A + C > 0$ $(A, C > 0)$



horisontal tangent siden $f'_x = 0$

$A = f''_{xx} > 0$ $\cup$



$f'_y = 0$

$C = f''_{yy} > 0$ $\cup$

Oppgaveark 28

1h) 4h) $f(x,y) = \ln(x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3)$

$= \ln(u)\,,\quad u = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$

$f'_x = \frac{1}{u}\cdot u'_x = \frac{2xy^2 - 2x}{u} = \frac{2x(y^2-1)}{u} = 0$

$f'_y = \frac{1}{u}\cdot u'_y = \frac{2x^2y - 2y}{u} = \frac{2y(x^2-1)}{u} = 0$

$2x(y^2-1) = 0$ $x=0$ eller $y^2=1$
$2y(x^2-1) = 0$ $y=0$ eller $x^2=1$ $\Big\}$ $x=0, y=0$; $x=\pm1, y=\pm1$

Stasjonære pkt: $(0,0)$, $(\pm1,\pm1)$

$f''_{xx} = \left(\frac{2x(y^2-1)}{u}\right)'_x = \frac{2(y^2-1)\cdot u - 2x(y^2-1)\cdot 2x(y^2-1)}{u^2}$

$f''_{xy} = \left(\frac{2x(y^2-1)}{u}\right)'_y = \frac{2x\cdot 2y\cdot u - 2x(y^2-1)\cdot 2y(x^2-1)}{u^2}$ ✓

$f''_{yy} = \left(\frac{2y(x^2-1)}{u}\right)'_y = \frac{2(x^2-1)\cdot u - 2y(x^2-1)\cdot 2y(x^2-1)}{u^2}$

$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2\cdot 3/3^2 & 0 \\ 0 & -2\cdot 3/3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$

$u(0,0)=3$

$\det = 4/9 > 0$
$\operatorname{tr} = -4/3 < 0$ $\Big\}$ $(0,0)$ lokalt maks ✓

$f(0,0) = \underline{\ln(3)}$

$H(f)(\pm1,\pm1) = \begin{pmatrix} 0 & 8\cdot(\pm1)/4 \\ \frac{8\cdot(\pm1)}{4} & 0 \end{pmatrix}$

$u(\pm1,\pm1) = 2$

$\det = 0 - [2(\pm1)]^2 = -4 < 0 \Big\}$ $(\pm1,\pm1)$ sadelpkt

Globale maks/min for f:

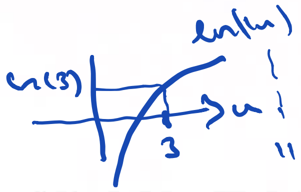
Global min: Nei, ingen lokale min

Globale maks: Kandidat $(x,y) = (0,0)$

$f(0,0) = \underline{\ln(3)}$

Nei

$f(x,y) = \ln(u)\,,\quad u = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$



Kan vi få u større enn 3 ? Ja

$u(2,2) = 16 - 4 - 4 + 3 = 11$

$f(2,2) = \ln(11) > \ln 3$

1f)

4f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$

$f'_x = -3x^2 + 3 = 0 \quad x^2 = 1 \quad x = \pm 1$

$f'_y = 2y = 0 \quad y = 0$

Stasj. pkt: $(\pm 1, 0)$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det = -12 < 0 \quad \text{sadelpkt}$$

$$H(f)(-1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det = 12 > 0, \quad \mathrm{tr} = 8 > 0 \quad \text{lokalt min}$$

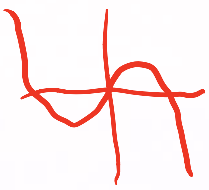
Globale maks/min:

Globalt maks: Nei

Globale min: Kandidat $(-1,0)$ lokalt min

$f(-1,0) = -2$ Nei

$y=0$: $f(x,0) = -x^3 + 3x$



$x=3$: $f(3,0) = -27 + 9 = -18 < -2$

5a) $f(x,y) = xy(x^2-y^2) = x^3y - xy^3$

$$f'_x = 3x^2y - y^3 = y(3x^2-y^2) = 0$$
$$f'_y = x^3 - x\cdot 3y^2 = x(x^2-3y^2) = 0$$

$y=0$ eller $3x^2=y^2$

$x=0$ eller $x^2=3y^2$

$(x,y)=(0,0)$

$3x^2=y^2 \rightarrow y^2=3x^2$

$x^2=3y^2 \quad x^2=3\cdot(3x^2)$

$x^2=9x^2$

$x^2=0,\ y^2=0$

$x=y=0$

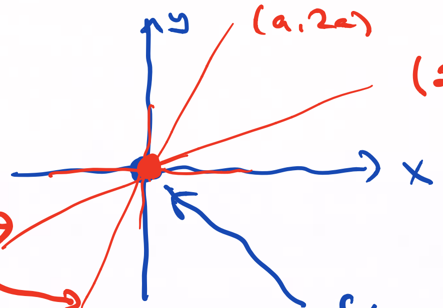
$$H(f) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2-3y^2 \\ 3x^2-3y^2 & -6xy \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det = 0$$

Andrederivert-testen kan ikke brukes.

Dette: $f(0,0)=0$

$f(x,y) = xy(x^2-y^2)$



Dette: $(0,0)$ lokalt maks: $f(x,y) \le 0$ for alle punkt nært $(0,0)$

$(0,0)$ lokalt min: $f(x,y) \ge 0$ for alle plt nært $(0,0)$

$y=2x$: $(a,2a)$

$$f = a\cdot 2a\cdot(a^2-4a^2) = 2a^2(-3a^2) = -6a^4 \le 0$$

Sadelpkt

$x=2y$: $(2a,a)$

$$f = 2a\cdot a((2a)^2-a^2) = 2a^2\cdot 3a^2 = 6a^4 \ge 0$$