Forelesning 22

① Antall løsninger i lineære system

② Vektorer og matriser

③ Determinanter

① Lineære system:

Resultat: Ethvert lineært system har enten

i) Ingen løsninger

ii) Én løsning

iii) Uendelig mange løsninger

Pivotposisjoner: De posisjonene som har pivot når man har funnet en trappeform

- pivot i siste kolonne: Ingen løsninger
- ikke pivot i siste kolonne
  - pivot i alle variabelkolonner: Én løsning
  - minst én variabelkolonne uten pivot: Uendelig mange løsninger

    uten pivot → fri variabel

variabelkolonne = kolonne som svarer til koeff. foran én variabel = alle kolonner unntatt den siste

② Vektorer og matriser

En $m \times n$-matrise A er en rektangulær tabell med m rader og n kolonner, der hver plass i tabellen inneholder et tall.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n} \Bigg\} m$$

rad 1, kolonne 2

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

En matrise er kvadratisk hvis $m = n$ (antall rader = antall kolonner)

Regneoperasjoner:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vi kan addere/subtrahere matriser av samme størrelse

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

skalar-multiplikasjon (skalar = tall)

En <u>vektor</u> er en matrise som består av én kolonne. Det kalles en <u>kolonnevektor</u>, og vi kaller det også en n-vektor hvis den har n rader.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

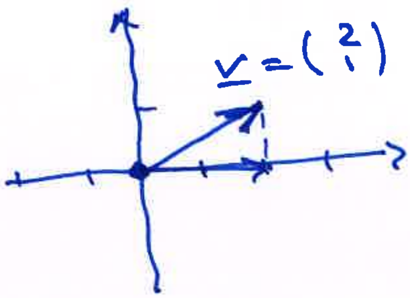
Skrivemåte:
$\underline{v}$ = boldface v = $\vec{v}$

$$\underline{v} = (2,-1)$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geometrisk representasjon:

En vekter har både <u>størrelse</u> og <u>retning</u>, representert ved en pil:

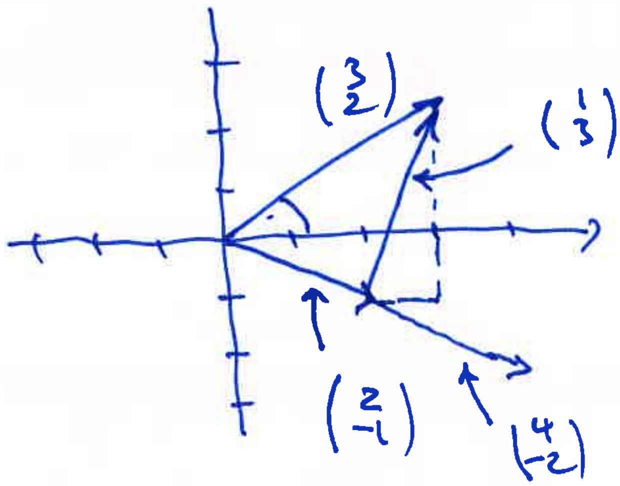


Regneoperasjoner:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$



En vekter har <u>størrelse</u> og <u>retning</u>

<u>Retning:</u> den retningen som pilen peker i

<u>Størrelse:</u> lengden til pilen: $\|\underline{v}\|$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$: $\|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

<u>Eks:</u> $\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$: $\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

3 Determinanter

$A \rightsquigarrow \det(A) = |A|$

$n \times n$ matrise

determinanten til A, et tall

i) Tilfellet $n=2$:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\boxed{\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad - bc}}$

Eks: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 0 \cdot 0 = \underline{6}$ $\qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \underline{-6}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 2\cdot 2 = \underline{1}$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{-1}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 2 = \underline{0}$

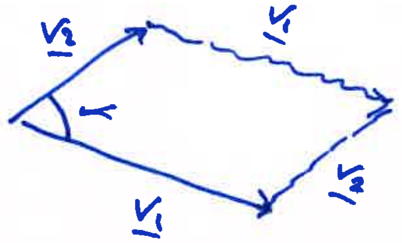
$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bytter om to rader eller kolonner $\rightarrow$ $\det(A)$ bytter fortegn.

En av vektorene er en skalar multiplisert med den andre vektoren $\rightarrow \det(A) = 0$

Geometrisk tolkning: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

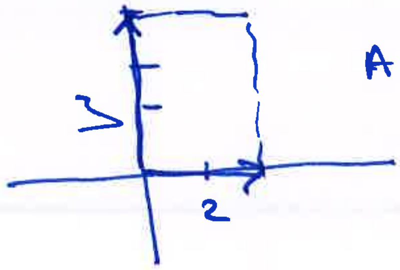
kolonnevektorene i A



Arealet av parallellogramet utspent av $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ $= \pm |A|$.

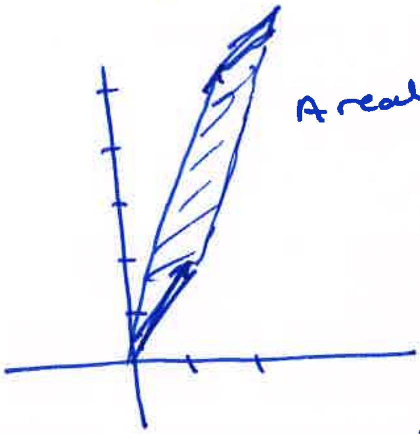
Areal: $\|\underline{v}_1\| \cdot \|\underline{v}_2\| \cdot \sin \alpha$

$$\left|\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right| = \underline{6}$$



Areal = $2\cdot 3 = \underline{6}$

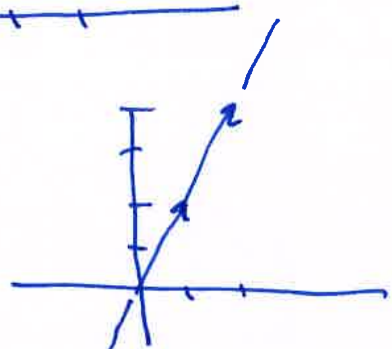
$$\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix} = \underline{1}$$



Areal =

$$\begin{vmatrix}2&1\\5&2\end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix} = \underline{0}$$



ii) Tilfellet $n>2$:

Metode: **Kofaktor utvikling** langs en rad eller en kolonne

Eks:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}$$

$$= +1\cdot\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix} - 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix}}_{M_{12}} + 1\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}$$

fortegn   tall i rad 1   minor

$$= 1\cdot(2\cdot 9 - 3\cdot 4) - 1(1\cdot 9 - 1\cdot 4) + 1\cdot(1\cdot 3 - 1\cdot 2)$$

$$= 6 - 5 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Kofaktoren C_{ij}: (i posisjon (i,j)) rad i, kolonne j

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

M_{ij}: minoren i pos. (i,j) = determinanten av undermatrisen vi får ved å slette rad i, kolonne j

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Kofaktor utvikling langs andre kolonne

$$= a_{12} \cdot C_{12} + a_{22} \cdot C_{22} + a_{32} \cdot C_{32}$$

$$= 1 \cdot C_{12} + 2 \cdot C_{22} + 3 \cdot C_{32}$$

$$= -1 \cdot M_{12} + 2 \cdot M_{22} - 3 M_{32}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -(9-4) + 2(9-1) - 3(4-1)$$

$$= -5 + 16 - 9 = \underline{\underline{2}}$$

$C_{ij} = \underline{(-1)^{i+j}} \cdot M_{ij}$

$(-1)^{i+j} = \underline{\text{fortegn}}$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - - \\ - & + & - & - - \\ + & - & + & - - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

M_{ij}: <u>minor</u>

stryk $\boxed{\begin{matrix}\text{rad } i \\ \text{kol. } j\end{matrix}}$

<u>Kofaktor utvikling:</u>

- generell metode, <u>kan alltid brukes</u>
- samme svar uansett rad/kolonne vi velger

<u>n=3:</u>

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

kun for n=3

Del 2: Repetisjon: Determinant

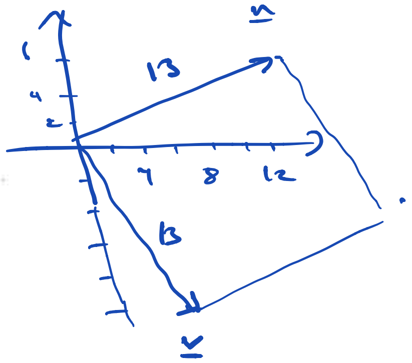
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad-bc} \qquad (n=2)$$

Kofaktor utvikling $\qquad (n>2)$

Oppgaveark 22:

1 c) $\underline{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

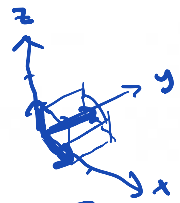
$\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$



$$\|\underline{u}\| = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25}$$
$$= \sqrt{169} = \underline{13}$$
$$\|\underline{v}\| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = \underline{13}$$
$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} = |\underline{v} \; \underline{u}| = 5\cdot 5 - 12\cdot(-12) = 25+144$$
$$= \underline{\underline{169}}$$

(areal av parallellogram)

2. a) $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



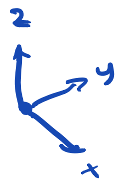
$\|\underline{u}\| = \sqrt{1^2} = \underline{1}$ $\qquad \|\underline{w}\| = \sqrt{1^2} = \underline{1}$

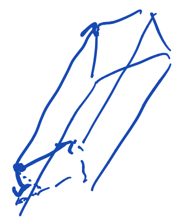
$\|\underline{v}\| = \sqrt{2^2} = \underline{2}$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots$$
$$= 1 \cdot (2 \cdot 3) = \underline{\underline{6}}$$

b) $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \underline{\sqrt{3}}$$
$$\|\underline{v}\| = \sqrt{1^2+2^2+4^2} = \underline{\sqrt{21}}$$
$$\|\underline{w}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \underline{\sqrt{3}}$$
$$|A| = |\underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1\cdot(2+4) - 1\cdot(1+1) + 1\cdot(4-2)$$
$$= 6 - 2 + 2 = \underline{\underline{6}}$$





4e.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & b^2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

$$= (ab^2 - ba^2) - (b^2 - a^2) + (b-a)$$

$$= ab(b-a) - (b-a)(b+a) + (b-a)$$

$$= (b-a)\cdot(ab - (a+b) + 1)$$

$$= \underline{\underline{(b-a)\cdot(a-1)(b-1)}}$$

5e

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = +a(a^2-1) - 1(a-1) + 1\cdot(1-a) \rightarrow a^3 - 3a + 2$$

$$= a(a-1)(a+1) - (a-1) - (a-1)$$

$$= (a-1)\cdot[a(a+1) - 1 - 1]$$

$$= (a-1)(a^2 + a - 2) = (a-1)(a+2)(a-1)$$

$$= \underline{\underline{(a-1)^2(a+2)}}$$

$-2+1=-1$

$(-2)\cdot 1 = -2$

6. c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot(-2) = \underline{-12}$$

øvre triangulær

$$= +1\cdot\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(+2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\right) = 1\cdot 2\cdot(3\cdot(-2))$$

$$= 1\cdot 2\cdot 3\cdot(-2) = -12$$

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left((-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) + 1\left(-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -1(-2) - 1\cdot(-2) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left(1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) - 3\left(1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (1\cdot 1 - 3\cdot 1)(2\cdot 2 + 1\cdot 1)$$

$$= (-2)(5) = \underline{\underline{-10}}$$