Plan

1. Lineære likningssystemer
2. Gauss-eliminasjon

Eksamen: Avsluttende eksamen: Hjemmeeksamen Bestått/ikke bestått.

① Lineære likningssystem

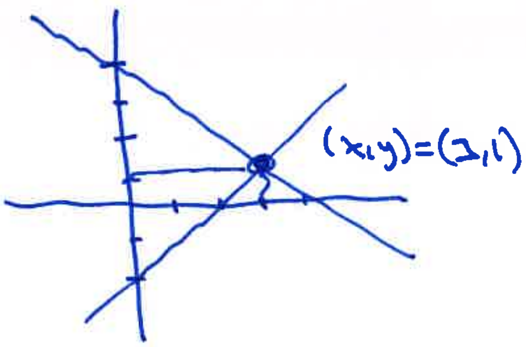
Eks:

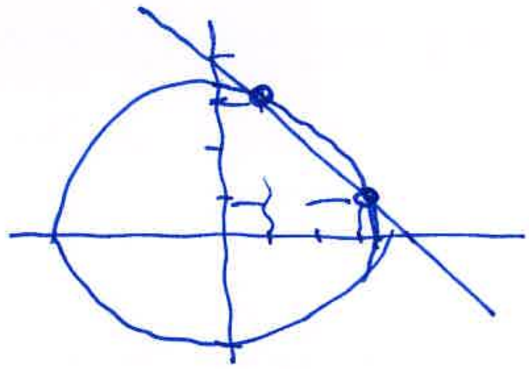
$$x + y = 4$$
$$x - y = 2$$

lineært

$$x^2 + y^2 = 10$$
$$x + y = 4$$

ikke lineært





$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

$x - y = 2 \qquad y = x - 2$

En løsn: $(x,y) = (3,1)$

$x^2 + y^2 = 10$ sirkel, sentr $(0,0)$, $r = \sqrt{10}$

To løsn: $(x,y) = (3,1), (1,3)$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

Løsning ved regning

i) $\boxed{\begin{aligned} x+y&=4 \\ x-y&=2 \end{aligned}}$

Innsettingsmetoden:

$x+y=4 \Rightarrow y=\underline{4-x}$

$x-y=2 \Rightarrow x-(4-x)=2$

$2x-4=2$

$\frac{2x}{2}=\frac{6}{2}$

$x=3$

$y=1$

Løsn: $(x,y)=(3,1)$

ii) $\boxed{\begin{aligned} x^2+y^2&=10 \\ x+y&=4 \end{aligned}}$

$x+y=4 \Rightarrow y=\underline{4-x}$

$x^2+y^2=10$

$x^2+(4-x)^2=10$

$x^2+16-8x+x^2=10$

$2x^2-8x+6=0 \quad |:2$

$x^2-4x+3=0$

$x=3$, $y=1$ eller $x=1$, $y=3$

Løsn: $(x,y)=(3,1),(1,3)$

Eliminasjonsmetoden:

$$\begin{array}{rl} & x+y=4 \\ + & x-y=2 \\ \hline = & 2x \quad =6 \end{array}$$

$\Downarrow$

$x=3,\ y=1$

$$\begin{array}{rl} & x+y=4 \\ - & x-y=2 \\ \hline = & 2y=2 \end{array}$$

$y=1,\ x=3$

Eks: $\begin{aligned} 2x+y&=5 \quad |\cdot 3 \\ 3x-7y&=-1 \quad |\cdot 2 \end{aligned}$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{rl} & 6x+3y=15 \\ - & 6x-14y=-2 \\ \hline = & 17y=17 \end{array}$$

$y=1,\quad 2x+1=5$

$2x=4$

$x=2$

Eks:

$$\boxed{\begin{aligned} x+y+z&=3\\ x+2y+4z&=7\\ x+3y+9z&=13 \end{aligned}}$$

3x3 lineært system

ant. likninger = 3, ant. variabler = 3

Innsetting:

① $x+y+z=3 \Rightarrow x = \underline{\underline{3-y-z}}$

② $x+2y+4z=7$

$(3-y-z)+2y+4z=7 \Rightarrow \boxed{y+3z=4}$

③ $x+3y+9z=13$

$(3-y-z)+3y+9z=13 \Rightarrow \boxed{2y+8z=10}$

2x2 lineært system

$y+3z=4 \Rightarrow y=\underline{4-3z}$

$2y+8z=10 \qquad 2(4-3z)+8z=10 \Rightarrow 2z=2$

$\underline{z=1}, \ \underline{y=1}, \ \underline{x=1}$

En løsn: $(x,y,z)=\underline{\underline{(1,1,1)}}$

Eks:

Løsning ved eliminasjon

i) eliminere x i andre likning

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 && \text{I}\\ x+2y+4z&=7 && \text{II}\\ x+3y+9z&=13 && \text{III}\end{aligned}$$

$\downarrow$

ii) eliminere x i tredje likning

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 && \text{I}\\ y+3z&=4 && \text{II}-\text{I}\\ x+3y+9z&=13 && \text{III}\end{aligned}$$

$\downarrow$

iii) eliminere $2y$ i tredje likning

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 && \text{I} && (A)\\ y+3z&=4 && \text{II}-\text{I} && (B)\\ 2y+8z&=10 && \text{III}-\text{I} && (C)\end{aligned}$$

$\downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} x+y+z&=3 && (A)\\ y+3z&=4 && (B)\\ 2z&=2 && (C)-2(B)\end{aligned}}$$

trappeform

baklengs substitusjon

$2z=2 \Rightarrow \underline{z=1}$

$y+3z=4 \Rightarrow y+3\cdot 1=4 \Rightarrow \underline{y=1}$

$x+y+z=3 \Rightarrow x+1+1=3 \Rightarrow \underline{x=1}$

(2) Gauss-eliminasjon

Defn: Et $m \times n$ lineært likningssystem = lineære system er et likningssystem som kan skrives

$$
m \text{ likninger} \left\{ \boxed{\underbrace{\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}}_{n \text{ variabler (ukjente)} = x_1, x_2, \dots, x_n}} \right.
$$

hvor $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m$ er gitte koeffisienter (tall).

Gauss-eliminasjon: Generell metode for å løse alle lineære system

- rask, generell, bra måte å skjønne hvorfor store system kan løses

Steg:

lineært system → utvidet matrise

utvidet matrise ↓ elementære radoperasjoner ↓ trappeform

trappeform → lineært system på trappeform

lineært system på trappeform ↓ baklengs substitusjon ↓ Løsning

Matriser:

Eks:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x+2y+4z &= 7 \\ x+3y+9z &= 13 \end{aligned}$$

3×3 lineært system

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1}^{\text{koeffisient matrise}} & & & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right)}_{\text{utvidet matrise}}$$

Generelt:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}}$$

har utvidet matrise

$$(A \mid \underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

og koeffisient matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eks:

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ x+2y+4z&=7\\ x+3y+9z&=13 \end{aligned} \quad\leadsto\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&3\\ 1&2&4&7\\ 1&3&9&13 \end{array}\right)$$

rad = likning

Elementære radoperasjoner:

i) Bytte om to rader

ii) Multiplisere en rad med $c \neq 0$.

iii) Legge til et multippel av en rad til en annen rad

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&3\\ 1&2&4&7\\ 1&3&9&13 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ + \\ \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&3\\ 0&1&3&4\\ 1&3&9&13 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ \\ + \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&3\\ 0&1&3&4\\ 0&2&8&10 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \\ + \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&3\\ 0&1&3&4\\ 0&0&2&2 \end{array}\right)$$

trappeform

$R(2) + (-1)\cdot R(1) = R(2) - R(1)$
ikke $R(1) - R(2)$

Pivot: Det første tallet i en rad $\neq 0$

Trappeform:

i) Alle nullrader er nedenfor andre rader

ii) Alle tall under en pivot er null

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ y+3z&=4\\ 2z&=2 \end{aligned}$$

Baklengs substitusjon:

$x + 1 + 1 = 3 \quad x = 1$

$y + 3\cdot 1 = 4 \quad y = 1$

$z = 1$

pivot-posisjoner $\Leftrightarrow$ variabler vi kan løse for

Løsn: $(x,y,z) = (1,1,1)$

Eks:

$$x + 2y = 4$$
$$2x + 4y = 7$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$0\cdot x + 0\cdot y = -1 \leftarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

ingen løsning trappeform

Generelt: (pivot i siste kolonne) $\Leftrightarrow$ ingen løsning

Eks: Anta at trappeformen er

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ z &= 7 \end{aligned}$$

trappeform y fri variabel

$$z = 7$$
$$x + 2y + 7 = 0 \Rightarrow x + 2y = -7$$
$$x = -7 - 2y$$

Løsn: $(x, y, z) = (-7-2y, y, 7)$ med y fri

uendelig mange løsninger (når vi har frie variabler)

Generelt: Hvis en variabel kolonne ikke har pivot-posisjon, så er variabelen fri.

Del 2:

- repetisjon
- oppgaver

Gauss-eliminasjon:

lineært system $m \times n$ → utvidet matrisen

elementære radoperasjoner

→ trappeform → lineært system

baklengs substitusjon

→ Løsning

Eks:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

trappeform

Eks:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Antall løsninger:

- pivot i siste kolonne → ingen løsning (inkonsistent)
- ikke pivot i siste kolonne → har løsninger; en eller flere (konsistent)

uendelig mange løsninger: kan løse for x og z, men ikke for y (y er fri) → Eks:

$$\begin{array}{c} \quad x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \end{array}$$

$4z = 8 \Rightarrow z = 2$

$x + 3 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x = -5$

$(x, y, z) = (-5, y, 2)$ med y fri

én løsning: kan løse for alle variabler (ingen frie variabler) → Eks:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \\ \quad x \quad y \quad z \end{array}$$

Oppgaveark 21

1d) $x^2 - y^2 = 8$

$xy = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3/x \quad (x \neq 0)$

$$x^2 - (3/x)^2 = 8$$

$$x^2 - 9/x^2 = 8 \quad | \cdot x^2$$

$$x^4 - 9 = 8x^2$$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

$u = x^2$: $\quad u^2 - 8u - 9 = 0$

$$u = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}$$

$u = 9$ eller $u = -1$

$x^2 = 9 \qquad \cancel{x^2 = -1}$

$\underline{x = \pm 3}$: $\quad x = 3,\ y = 1$ eller $x = -3,\ y = -1$

Løsn.: $(x, y) = \underline{\underline{(3,1)}}, \ \underline{\underline{(-3,-1)}}$

3b. $x - y + z = 3$

$2x - 4y + z = 1$

$3x - 5y + 2z = 4$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

trappeform

z fri, uendelig mange løsninger

$\underline{x} - y + z = 3$

$-2\underline{y} - z = -5$

Baklengs subst.:

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{z-5}{-2}$$

$$\underline{y = -z/2 + 5/2}$$

$\underline{x} - y + z = 3$

$x = y - z + 3$

$= (-z/2 + 5/2) - z + 3$

$x = \underline{-3z/2 + 11/2}$

$(x,y,z) = \left(-3z/2 + 11/2,\ -z/2 + 5/2,\ z\right)$ med z fri

6b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & -3 & -1 \\ 0 & -33 & -9 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

ingen løsning

7.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 11 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 10 & 6 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$x \quad y \quad z \quad w$

uendelig mange løsninger
w er fri

$x + y + z + w = 10 \rightarrow x = 10 - y - z - w = 10 - (5w - 3) + \cancel{w} - \cancel{w} = 13 - 5w$

$y + 3z - 2w = -3 \rightarrow y = -3z + 2w - 3 = 3w + 2w - 3 = 5w - 3$

$6z + 6w = 0 \rightarrow \frac{6z}{6} = \frac{-6w}{6} \Rightarrow z = -w$

Løsn: $(x,y,z,w) = (13 - 5w,\ 5w - 3,\ -w,\ w)$ med w fri

8.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right)$$

- ingen pivoter i siste kolonne
- minst to frie variabler

$\Downarrow$

uendelig mange løsninger

9.

$2xy + y^3 + y^2 = 0$
$x^2 + 3xy^2 + 2xy = 0$

$y(2x + y^2 + y) = 0 \quad (1)$
$x(x + 3y^2 + 2y) = 0 \quad (2)$

(1) $y = 0$ eller $2x + y^2 + y = 0$
(2) $x = 0$ eller $x + 3y^2 + 2y = 0$

Tilfeller:

a) $y = 0,\ x = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

b) $y = 0,\ x + 3y^2 + 2y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

c) $2x + y^2 + y = 0,\ x = 0 \Rightarrow y^2 + y = 0 \quad y(y+1) = 0 \quad y = 0,\ y = -1 \Big\} \ (x,y) = (0,0), (0,-1)$

d) $2x + y^2 + y = 0,\ x + 3y^2 + 2y = 0$: $\quad 2(-2y - 3y^2) + y^2 + y = 0$
$\Downarrow \qquad -4y - 6y^2 + y^2 + y = 0$
$x = -2y - 3y^2$

$-5y^2 - 3y = 0$ $\qquad x = -2y - 3y^2$

$-y(5y+3) = 0$

$y = 0$ eller $y = -3/5$

$x = 0$ $\qquad x = 6/5 - 3 \cdot (9/25)$

$= \frac{30-27}{25} = 3/25$

$(x,y) = (0,0)$ $\qquad (x,y) = (3/25, -3/5)$

Løsninger: $(x,y) = (0,0),\ (0,-1),\ (3/25, -3/5)$