MET 1181, 2. forelesning, 27. aug. 2020, Runar Ile

Plan:
1. Relativ endring og vekstfaktor
2. Potenser
3. Renter
4. Nåverdi av betalingsstrøm

1. Relativ endring og vekstfaktor

$$\text{Relativ endring} = \frac{\text{ny verdi} - \text{gammel verdi}}{\text{gammel verdi}}$$

Husk: $\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$ så $3\% = 3 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}03$

Eks Kåres timelønn har økt fra 163 kr til 181 kr

Da er den relative endringen

$$\frac{181\text{kr} - 163\text{kr}}{163\text{kr}} = 0{,}110 = \underline{11{,}0\ \%}$$

$$\text{Vekstfaktor} = 1 + \text{relativ endring}$$

Eks Vekstfaktoren til Kåres timelønnsøkning er $1 + 0{,}110 = \underline{1{,}11}$

Oppgave I fjor tjente Kåre 54 000 (m. 163/time). Hva vil han tjene i år hvis han jobber like mye og timelønnen er 181/time.

Løsning $54000 \cdot 1{,}11 = \underline{59\,940}$

2. Potenser

$$1{,}11^3 = 1{,}11 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}11$$

$$1{,}11^{-3} = \frac{1}{1{,}11^3}$$

$$1{,}11^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1{,}11^2}$$

For heltall m, n med $n > 0$
og for alle tall $a \geq 0$ er

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{definisjon}}{=} \sqrt[n]{a^m}$$

Oppgave Beregn $1{,}11^{\sqrt{2}}$ på kalkulatoren.
(svar: 1,159035....)

Løsning $1{,}11$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{=}$

Samme grunntall $2^{1{,}5} \cdot 2^{3{,}8} = 2^{1{,}5+3{,}8}$

Samme eksponent $2^{4} \cdot 3^{4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$$

$$= (2 \cdot 3)^4 = 6^4$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

Mønster: $a^r \cdot b^r = (ab)^r$

Oppgave Beregn 2^{-1} på kalkulatoren.

Løsning 1 2 $\boxed{y^x}$ 1 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$

Løsning 2 2 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ (fordi $2^{-1} = \frac{1}{2}$)

---

3. Renter

Eks Du setter 40 000 på en konto som gir 2,3 % årlig rente. Rentene kapitaliseres (legges til kapitalen) hvert år, etterskuddsvis.

Etter ett år er balansen (hva som står på kontoen) gitt som $40\,000 + 40\,000 \cdot 2{,}3\,\%$

$$= 40\,000\,(1 + 2{,}3\,\%)$$

$$= 40\,000 \cdot \underbrace{(1 + 0{,}023)}_{\text{vekstfaktor}} = 40000 \cdot 1{,}023$$

$$= \underline{40920{,}00}$$

Pausespørsmål: Hvordan regne $\sqrt[3]{2}$ på kalkulatoren?

Svar: 2 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$

Oppgave Hva er balansen etter 5 år?

Løsning

nå

0, 1, 2, ..., 5 tidslinje (år)

$$40\,000 \xrightarrow{\cdot 1{,}023} 40' \cdot 1{,}023 \xrightarrow{\cdot 1{,}023} 40' \cdot 1{,}023^2 \xrightarrow{\cdot 1{,}023^3} 40' \cdot 1{,}023^5$$

Svar: $40\,000 \cdot 1{,}023^5 = \underline{44\,816{,}52}$

Eks Hvis rentene legges til (kapitaliseres) hvert kvartal (kvartalsvis forrentning) vil vekstfaktoren for ett kvartal være

$$1 + \frac{2{,}3\,\%}{4} = 1 + 0{,}00575 = 1{,}00575$$

Balansen etter 1 år : $40\,000 \cdot 1{,}00575^4$

—— " —— 5 år : $40\,000 \cdot 1{,}00575^{20}$

Vi sier at 2,3 % er den nominelle renten

Den årlige vekstfaktoren er

$$1{,}00575^4 = 1{,}023199$$

så den effektive renten er 2,3199 %

(litt mer enn 2,3 %)

Mønsteret

nominell rente

antall terminer

$$B = B_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^m$$

balansen etter m terminer

innskudd

antall renteterminer per år

Effektiv rente $$r_{eff} = \underbrace{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}_{\text{vekstfaktor for ett år}} - 1$$

4. Nåverdi til kontantstrøm

La K_0 være en investering/innskudd/betaling i dag. Fremtidsverdien K_n av K_0 om n år (eller terminer) med (termin)rente r er

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

løser for K_0

Omvendt: Anta K_n skal betales om n år. Da er nåverdien K_0 av K_n gitt som

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

Oppgave Bestem nåverdien til 30 mill utbetalt om 5 år med 8% årlig rente.

Løsning $K_0 = \dfrac{30 \text{ mill}}{1{,}08^5} = 20{,}42$ mill

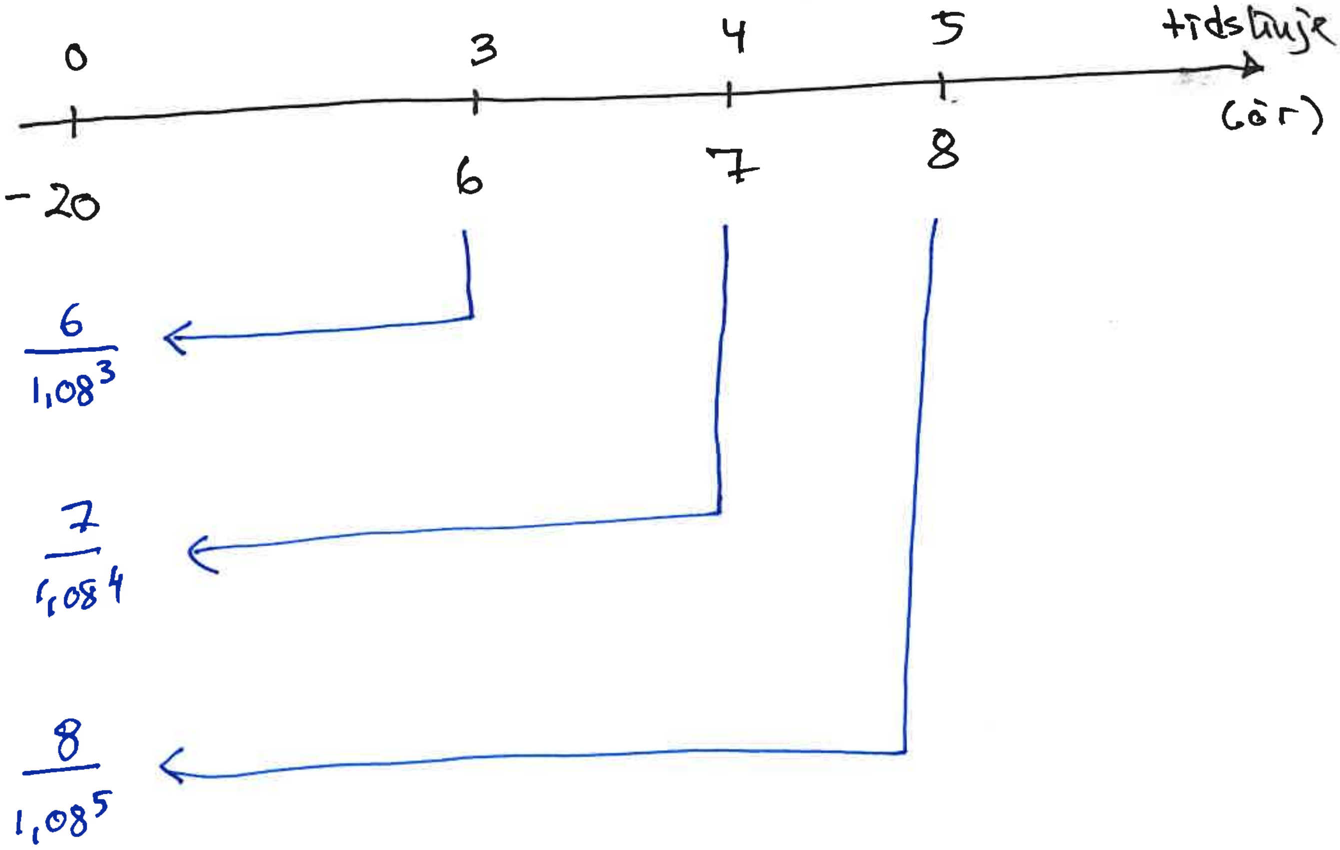
„Hvor mye må du sette i banken i dag for å ha 30 mill om 5 år hvis renten er 8 % ?" Svar

Kontantstrøm

Eks Du betaler 20 mill i dag og får tilbakebetalt
6 mill etter 3 år
7 mill etter 4 år
8 mill etter 5 år

år	0	3	4	5
betaling	−20	6	7	8

Rente:
8 %



$$= -20 + \frac{6}{1{,}08^3} + \frac{7}{1{,}08^4} + \frac{8}{1{,}08^5}$$ er

nåverdien til kontantstrømmen med 8 % rente

$= \underline{\underline{-4{,}65}}$ (dårlig investering)

Renten som gjør at nåverdien til kontantstrømmen er lik 0 kalles internrenten.

- generelt vanskelig å finne eksakt løsning på hva internrenten er.

Hjemmelekse: Bestem internrenten i eks. (svar: 1,12 %)