Plan

1 Introduksjon til integrasjon og bestemte integraler
2 Antiderivasjon og ubestemte integraler
3 Integrasjonsregler

Undervisning:

Torsdag kl 10-12 : Forelesning - nytt stoff
Torsdag kl 12-17 : Veiledning
Torsdag kl 09-10 (neste uke) : Webinar - repetisjon oppgave-gjennomgang

Tema:

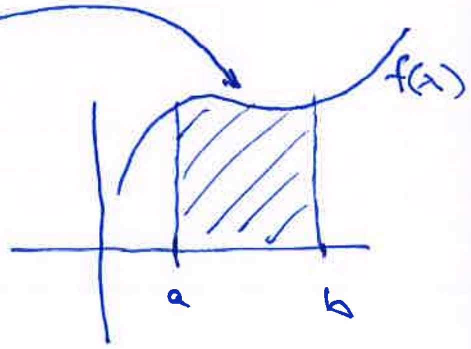
- integrasjon (Kap 5)
- matriser og vektorer (Kap 6)
- funksjoner i to variabler (Kap 7)

Forelesningsnotater : legges ut rett etter foreles.
Video: legges ut litt senere
Oppgavesett : legges ut onsdag ettermiddag
+ rom for Webinar

① Intro til integrasjon, bestemte integral

Defn av bestemte integraler:

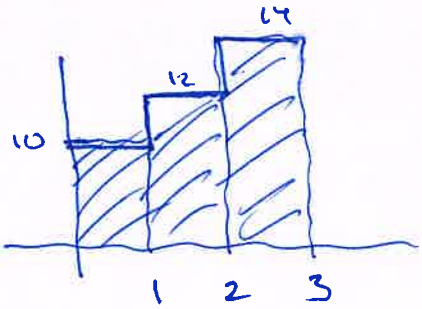
$$\int_a^b f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{arealet under} \\ \text{grafen til } f \\ \text{i } [a,b] \end{array} \right\}$$



Merk:
$f(x)$ kont. i $[a,b]$
$f(x) \geq 0$ — " —
$a < b$

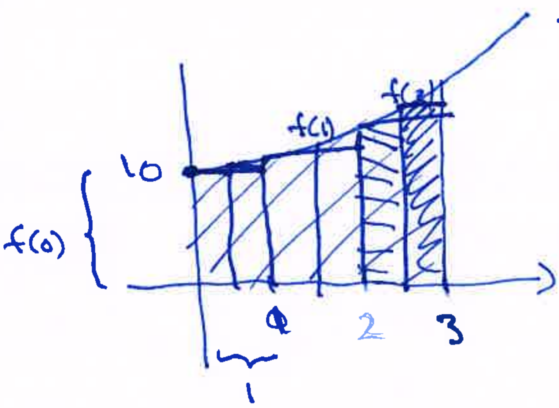
Eks: Leieinntekt

$10 + 12 + 14 = 36$



Notasjon:
$\int$ integrasjonstegn
dx: x integrasjonsvariabel

$f(x) = 10 \cdot 1{,}2^x$

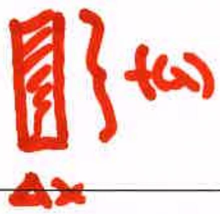


Tilnærming: Riemannsum

$1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2)$
$= 1 \cdot 10 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 14{,}4 = \underline{36.4}$

$\frac{1}{2} \cdot f(0) + \frac{1}{2} f(0.5) + \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(1.5)$
$+ \frac{1}{2} f(2) + \frac{1}{2} f(2.5)$

$\int f(x)dx$ = sum av bokser med areal $f(x) \cdot \Delta x$



$\Delta x \to dx$ når vi lar bredden $\to 0$

② Antiderivasjon og ubestemt integral

Defn: En antiderivert til en funksjon $f(x)$ er en funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$.

Eks: $f(x) = 2x$ $\quad F(x) = x^2$ er en anti-derivert til $2x$.

$F(x) = x^2+1$ — " —

Defn: $\boxed{\text{Den generelle antideriverte til } f(x) \text{ er et uttrykk som inneholder alle antideriverte til } f(x).}$

Eks: $f(x) = 2x$

$F'(x) = 2x$

Resultat: Hvis $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, så er den generelle antideriverte

$$F(x) + C$$

Hvorfor? $F'(x) = 2x$ vet at $F(x) = x^2$ passer.

Da har vi: $F'(x) = 2x$

$(x^2)' = 2x$

$$F'(x) - (x^2)' = 0$$

$$\underbrace{(F(x) - x^2)'}_{} = 0$$

$$F(x) - x^2 = C$$

$$F(x) = x^2 + C$$

Ubestemt integral:

x er integrasjonsvariabelen

$\frac{dy}{dx} = y' \iff dy = y'\,dx$

Defn: $\underbrace{\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{den generelle antiderivert} \\ \text{til } f(x) \end{array} \right\}}_{\text{defn. av ubestemte integral}} = F(x) + C$

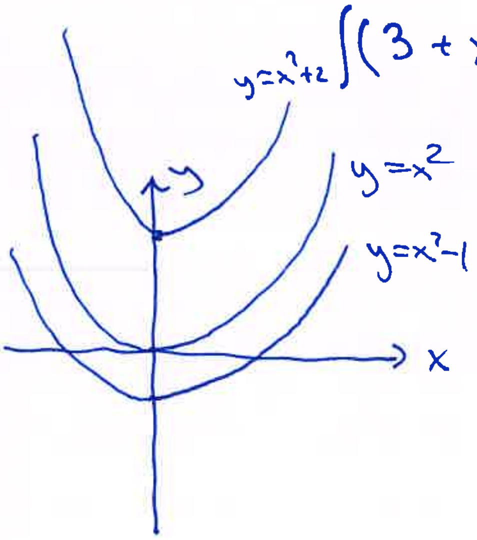
Altså: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ hvis $F'(x) = f(x)$

Eks: $\int 2x\,dx = x^2 + C$ ← integrasjonskonstant

$\int (3+x)\,dx = 3x + \frac{1}{2}x^2 + C$

$F'(x) = 3+x$

$F(x) = ?$



$\int f(x)\,dx$

$= \int 2x\,dx = x^2 + C$

Ubestemt integral: vi kan ikke bestemme C, den er ubestemt

(3) Integrasjonsregler

Potensregelen:

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1}$$

$$(x^{n+1})' = (n+1)\cdot x^n$$

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \cancel{\frac{1}{n+1}}\cdot \cancel{(n+1)}\,x^n$$

Eks:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int \underbrace{x^{-2}}_{n=-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int \underbrace{x^{1/2}}_{n=1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{2\cdot x^1\cdot x^{1/2}}{2\cdot 3/2} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int \underbrace{x^{1/2}}_{n=1/2}\,dx = \underbrace{\frac{2}{3}}_{\frac{1}{n+1}}\,\underbrace{x^{3/2}}_{x^{n+1}} + C$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

Potensregler:

① Potensregelen: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad , n \neq -1$

② $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

③ Integrasjon ledd for ledd: $\int u(x) \pm v(x)\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$

④ $\int c \cdot u(x)\,dx = c \cdot \int u(x)\,dx$ (c er konst.)

⑤ Integrasjon av eksponentialfn.: $\begin{cases} \int e^x\,dx = e^x + C \\ \int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C \quad , a > 0 \end{cases}$

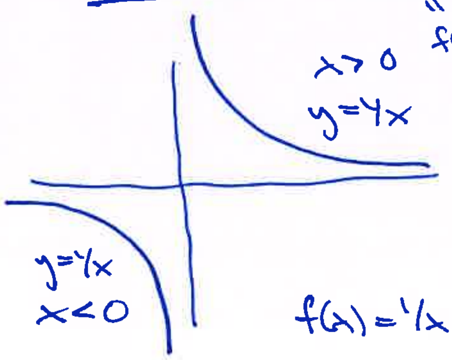
Eks: $\int x^3 - 3x + 1\,dx = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C$

$$= \underline{\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C}$$

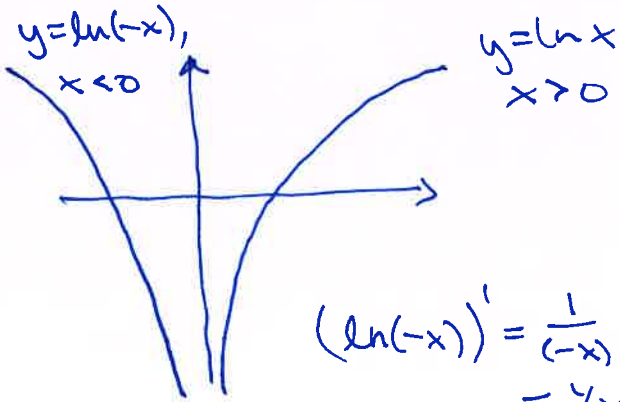
$$\int \frac{2-x}{x^2}\,dx = \int \frac{2}{x^2} - \frac{x}{x^2}\,dx = \int 2x^{-2} - \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) - \ln|x| + C = \underline{-2/x - \ln|x| + C}$$

Forklaring: $\underset{f(x)}{\int \frac{1}{x}}\,dx = \underset{F(x)}{\ln|x| + C}$



$f(x) = 1/x, \; x \neq 0$



$(\ln(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1)$
$= 1/x$

Integrasjonsteknikker:

i) Substitusjon ← Kjerneregelen baklengs
ii) Delvis integrasjon ← produktregelen
iii) Delbrøksoppspalting ← brøkregelen

Substitusjon:

Eks: $\int e^{-2x}\,dx = \cancel{\int e^u = e^u + C}$

$\boxed{u = -2x}$

Kjerneregelen:

$(e^{-2x})' = e^u \cdot (-2)$
$= -2 \cdot e^{-2x}$

$e^{-2x} = e^u$, $u = -2x$

$$\int e^{-2x}\,dx = \int e^u\,dx = \int e^u \cdot (-\tfrac{1}{2})\,du$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= -2x \\ du &= u' \cdot dx \end{aligned}}$$

$du = -2\,dx$

$dx = \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2}\,du$

$u' = \frac{du}{dx} \rightarrow du = u'\,dx$

$$= \int -\frac{1}{2} e^u\,du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

Eks:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx =$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2+1 \\ du &= 2x\,dx \end{aligned}} \leftarrow \begin{aligned} du &= u'\,dx \\ dx &= \frac{du}{2x} \end{aligned}$$

$$= \int x\sqrt{u}\cdot\frac{du}{2x} = \int \frac{\cancel{x}\sqrt{u}}{2\cancel{x}}\,du$$

$$= \int \frac{\sqrt{u}}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot u^{3/2}\right) + C = \frac{1}{3}\,u\cdot\sqrt{u} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$

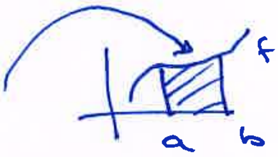
Substitusjon:

- Vi velger variabelskifte $u = \_\_$ (fn. i x)
- Vi bruker variabelskifte + $du = u'\cdot dx$ til å gjøre om til et integral i u
- Vi løser integralet i u (forhåpentligvis lettere!) og setter inn for å gjøre om svaret til uttrykk i x

Del 2:

Repetisjon

Bestemte integral: $\int_a^b f(x)\,dx = \text{areal}$



Ubestemte integral: $\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x) + C}$

den generelle antiderivete til $f(x)$, dvs $F'(x) = f(x)$.

Integrasjonsregler:

Potensregelen: $\rightarrow \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Integrasjonsteknikk:

Substitusjon

$$\int f(x)\,dx = \int g(u)\,\underline{du}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ldots \\ du = u'\,dx \end{array}}$$

Metode:

1. Velg ny variabel $u = \ldots$ (uttrykt i x)
2. Bruk variabelskifte og $du = u' \cdot dx$ til å skrive om integralet til et integral i u.
3. Løs integralet i u, og skriv svaret som uttrykk i x

Oppgaver Oppgavesett 17

4d $\int f(x)\,dx = xe^{2x} + C$

$f(x) = (xe^{2x})' = 1\cdot e^{2x} + x\cdot e^{2x}\cdot 2$

$= e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x}$

h $\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

$(xe^{2x})' = 1\cdot e^{2x} + 2xe^{2x}$

$(\frac{1}{2}xe^{2x})' = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + xe^{2x}$

$(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x})' = \cancel{\frac{1}{2}e^{2x}} + xe^{2x} - \cancel{\frac{1}{4}e^{2x}\cdot 2}$

5. $\int \frac{(A+Bx)e^{2x}}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\,e^{2x} + C$

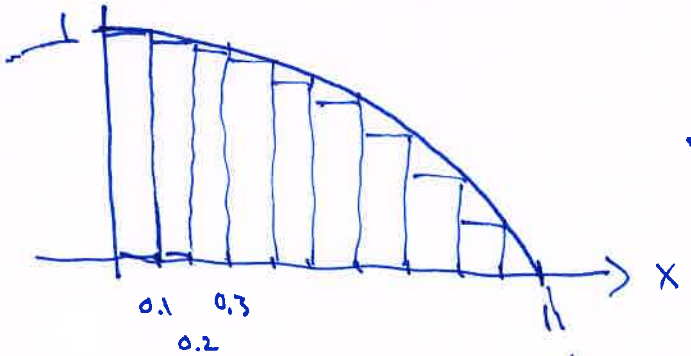
$(\sqrt{x}\,e^{2x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{2x} + \sqrt{x}\cdot e^{2x}\cdot 2\cdot\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{e^{2x} + 2\sqrt{x}\,e^{2x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{2x} + 4xe^{2x}}{2\sqrt{x}}$

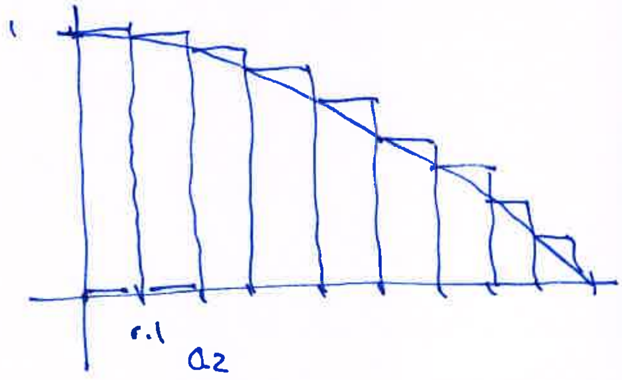
$= \frac{(1+4x)e^{2x}}{2\sqrt{x}} \longleftarrow$ $A=1$, $B=4$

13. $\int_0^1 1-x^2\,dx$: tilnærme med 10 delintervall

$f(x)$



eller



$$0.1\cdot f(0.1) + 0.1\cdot f(0.2) + \dots + 0.1\cdot f(1)$$
$$= 0.1\,(\underbrace{1-0.1^2}_{f(0.1)} + \underbrace{1-0.2^2}_{f(0.2)} + \dots + 1-1^2)$$

$$0.1\cdot f(0) + 0.1\cdot f(0.1) + \dots + 0.1\cdot f(0.9)$$
$$= 0.1\,(\underbrace{1-0^2}_{f(0)} + \underbrace{1-0.1^2}_{f(0.1)} + \dots + 1-0.9^2)$$

12. $f(x) = \dfrac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $x>0$

a) $$f'(x) = \frac{e^{1-\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x} - e^{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \quad \cdot\sqrt{x}\cdot 2$$

$$= \frac{-\sqrt{x}\,e^{1-\sqrt{x}} - e^{1-\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}} = \frac{-e^{1-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{2x\sqrt{x}}$$

b) $x>0$: $f'(x) = \dfrac{-e^{1-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{2x\sqrt{x}} < 0$

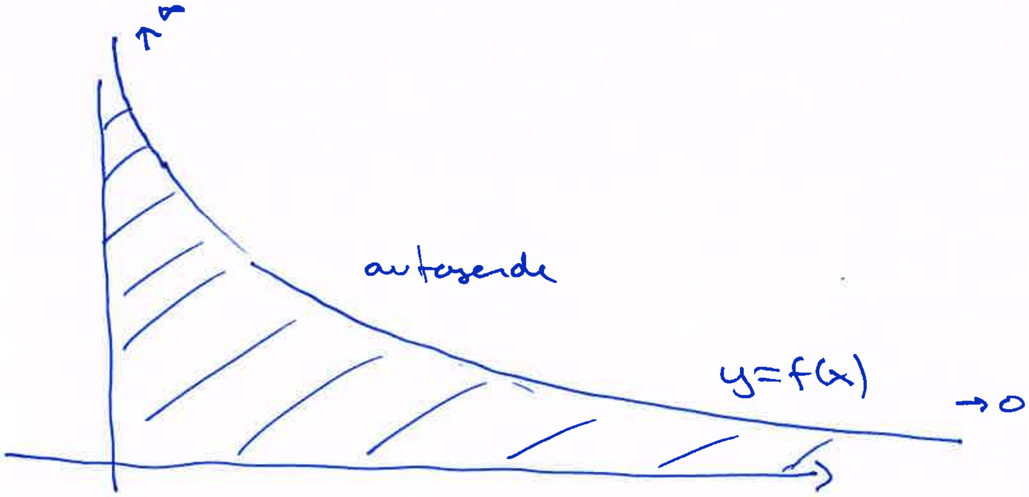
siden $e^{1-\sqrt{x}}$, $(\sqrt{x}+1)$, $2x\sqrt{x} > 0$

f er avtagende

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ siden teller $\to e^1 = e$, nevner $\to 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim \frac{1}{\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}-1}} = \underline{\underline{0}}$$

d)



6i

$$\int (x+1)^2\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x+1 \\ du &= 1\cdot dx \end{aligned}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}(x+1)^3 + C}}$$

7a.

$$\int \frac{1-3x^2}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\,dx = \int x^{-2} - 3\,dx$$

$n=-2$
$n+1=-1$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} - 3x + C = \underline{\underline{-\frac{1}{x} - 3x + C}}$$