MET1181, 14. forelesning, 3. nov. 2020, Runar Ile

Plan
1. Implisitt derivasjon — kap 4.5
2. Den andre deriverte og krumning — kap 4.7
3. Konveks optimering

1. Implisitt derivasjon

Eks $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

– vanlig derivasjon.

Alternativ Setter $y = f(x)$, så $y = \frac{1}{x}$ $\quad | \cdot x$

får likningen $\boxed{xy = 1}$

Skal prøve å finne y' uttrykt ved hjelp av x og y.

Deriverer v.s og h.s. med hensyn på x

$$(xy)'_x = (1)'_x$$

Bruker produktregelen på venstresiden

$$\overbrace{(x)'_x}^{1} \cdot y + x \cdot y'_x = 0$$

dvs $\quad y + x \cdot y' = 0$

Prøver å løse denne likningen for y'.

$$x y' = -y \quad | : x$$

$$y' = -\frac{y}{x}$$

(Husk: $y = \frac{1}{x}$ så $y' = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = -\frac{1}{x^2}$)

Poenget: Vi behøver ikke å kjenne uttrykket for $y(x)$!

Dette kalles implisitt derivasjon.

F.eks Hvis $x = 2$ så er $2 \cdot y = 1$

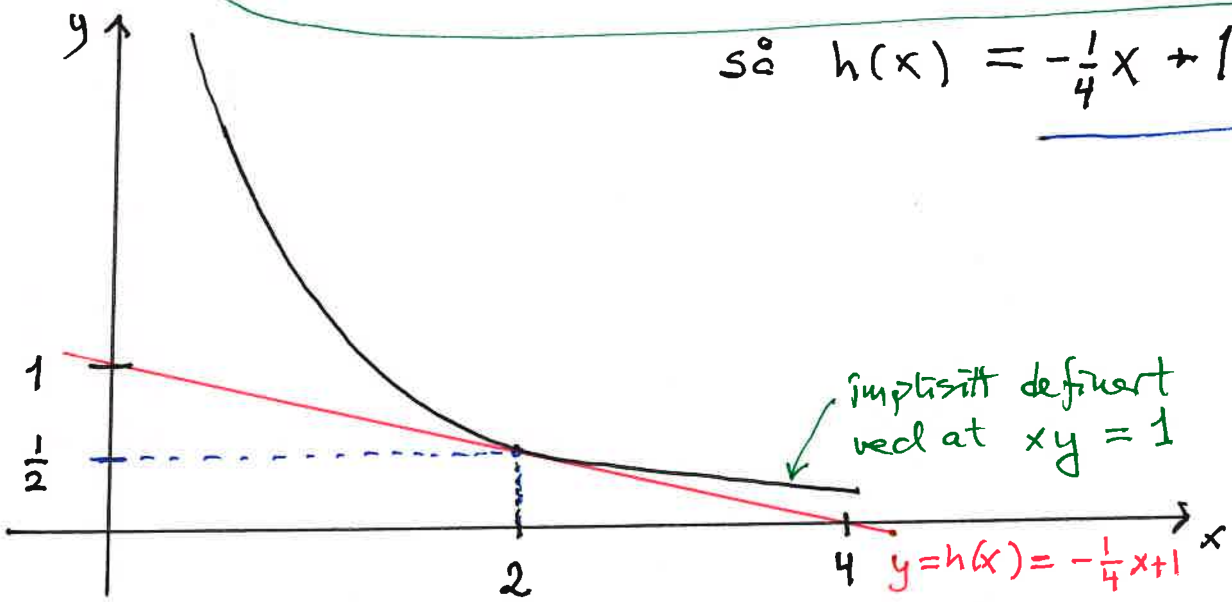
dvs $y = \frac{1}{2}$

Da er $y'\Big|_{\substack{x=2 \\ y=\frac{1}{2}}} = -\frac{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

Kan bruke dette stigningstallet til å finne funksjonsuttrykket $h(x)$ til tangenten i punktet $\left(2, \frac{1}{2}\right)$:

Ettpunktsformelen gir $h(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (x - 2)$

så $h(x) = -\frac{1}{4}x + 1$



Eks En kurve er implisitt definert ved at

$$y^2 - x^3 = 1$$

a) Uttrykk y' ved hjelp av y og x ved implisitt derivasjon (tenk på y som en funksjon av x)

b) Finn alle løsninger for y når $x = 2$

c) Beregn y' for disse punktene

Løsning a) Deriverer begge sider av likningen:

$$(y^2)'_x - (x^3)'_x = (1)'_x$$

Bruker kjerneregelen med

$$u = y \qquad g(u) = u^2$$
$$u'_x = y'_x \quad \text{og} \quad g'(u) = 2u = 2y$$

$$2y \cdot y' - 3x^2 = 0$$

Løser denne nye likningen for y'.

$$2y \cdot y' = 3x^2 \quad | : 2y$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{3x^2}{2y}}}$$

b) $\underline{x = 2}$ gir likningen

$$y^2 - 2^3 = 1 \quad \text{dvs} \quad y^2 = 9 \quad \text{så} \quad \underline{\underline{y = \pm 3}}$$

c) $(2,-3)$ gir $y' = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot (-3)} = \underline{\underline{-2}}$

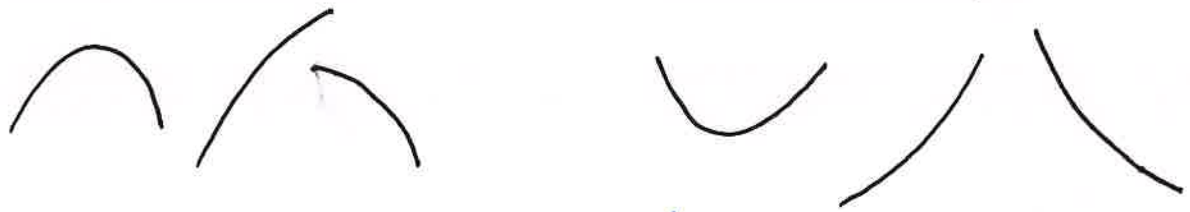
$(2,\ 3)$ gir $y' = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{2}}$

Fortsetter kl. 15.50

2. Den andrederiverte og krumning

Hvilken vei krummer grafen?

<u>krummer ned</u>   <u>krummer opp</u>

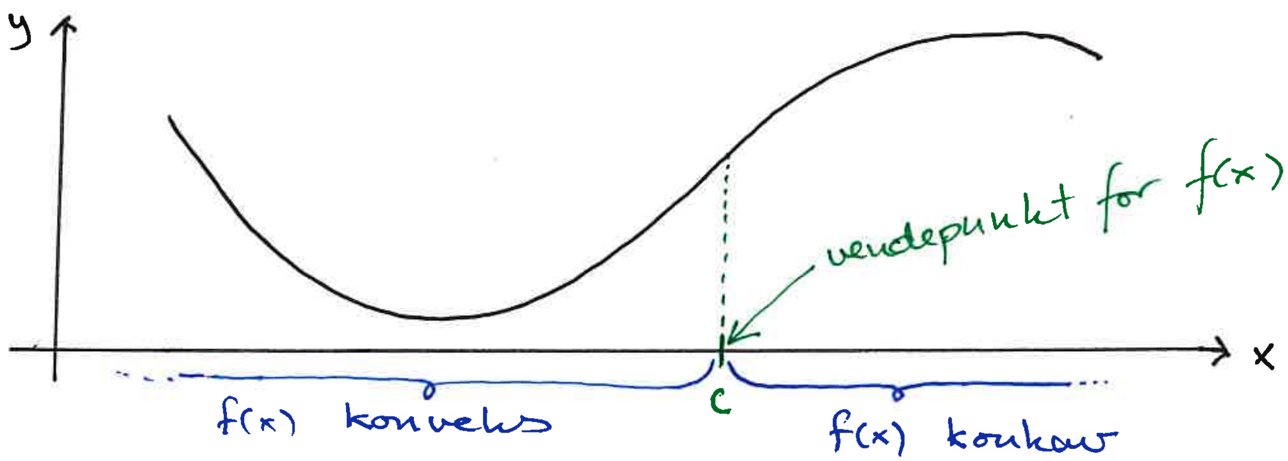


konkave grafer/funksjoner   konvekse grafer/funksjoner

<u>Definisjon</u> $f(x)$ er <u>konveks</u> på intervallet $[a, b]$ hvis $f''(x) \geq 0$ for alle x i $\langle a, b \rangle$

<u>konkav</u>: $f''(x) \leq 0$ —— " ——

Et tall c er et <u>vendepunkt</u> for $f(x)$ hvis $f''(x)$ endrer fortegn ved $x = c$



4

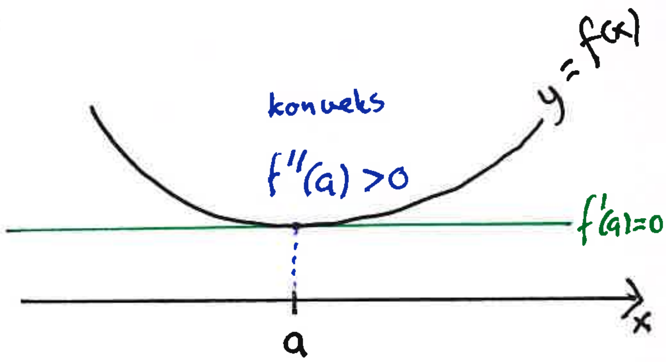
<u>Merk altså</u> Hvis $f(x)$ er konveks er $f'(x)$ en voksende funksjon

Hvis $f(x)$ er konkav er $f'(x)$ en avtagende funksjon

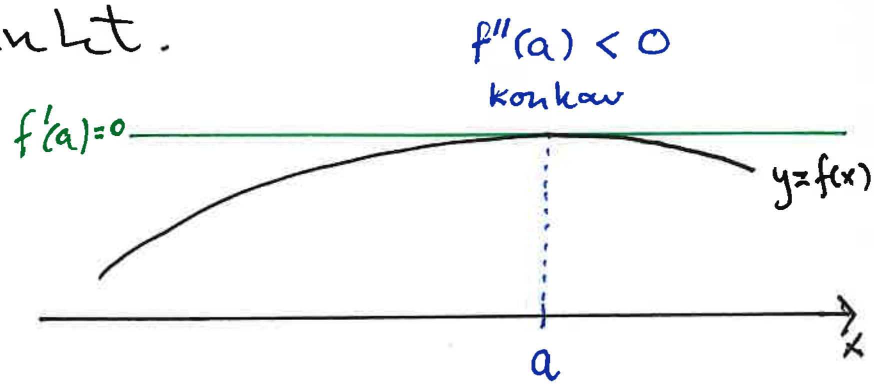
<u>Andrederiverttesten</u>

Anta at $x = a$ er et stasjonært punkt for $f(x)$, dvs $f'(a) = 0$.

Hvis $f''(a) > 0$ så er $x = a$ et (lokalt) minimumspunkt.



Hvis $f''(a) < 0$ så er $x = a$ et (lokalt) maksimumspunkt.



<u>Eks</u> $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ Vil finne maks./min. punkter.

Beregner $f'(x) = 3x^2 - 6x$ og løser likningen $f'(x) = 0$ for å finne de stasjonære punktene til $f(x)$.

dvs $3x^2 - 6x = 0$

setter $3x$ utenfor en parantes

$$3x(x-2) = 0$$

dvs $\underline{x=0}$ el. $\underline{x=2}$

Bruker andrederiverttesten for avgjøre om 0 og 2 er maks. eller min-punkter

Beregner $f''(x) = (f'(x))' = (3x^2-6x)' = \underline{6x-6}$

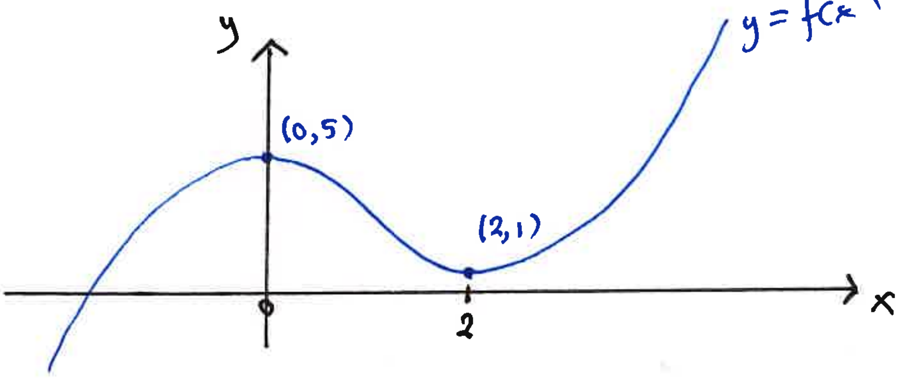
Setter inn de stasjonære punktene:

$f''(0) = 6\cdot 0 - 6 = -6 < 0$

Dvs $x=0$ er et lokalt maksimumspunkt

$f''(2) = 6\cdot 2 - 6 = 6 > 0$

Dvs $x=2$ er et lokalt minimumspunkt



3. <u>Konveks optimering</u>

Hvis $f(x)$ er <u>konveks</u> i hele sitt definisjonsområde, vil ethvert stasjonært punkt gi <u>globalt</u> minimum.

(og hvis $f(x)$ er <u>konkav</u> i hele D_f er alle stasjonære punkter globale <u>maksimums</u>punkter).

<u>Eks</u> $f(x) = x^4 + 5x^2 + 3$ med D_f = hele tallinjen

Finn stasjonære punktene til $f(x)$ og bruk konveks optimering til å avgjøre om de er globale maks. eller min.punkter

<u>Løsning</u> Vi finner $f'(x) = 4x^3 + 10x$

De stasjonære punktene er løsningene på likningen $f'(x) = 0$

dvs $4x^3 + 10x = 0$

faktoriserer ut x på v.s.

$x(4x^2 + 10) = 0$

så enten $\underline{\underline{x = 0}}$ el. $4x^2 + 10 = 0$

eneste stasjonære punkt

ingen løsninger fordi $4x^2 + 10 \geq 10$ for alle x

Beregner $f''(x) = 12x^2 + 10$

som er større eller lik 10 for alle x.

så $f''(x) \geq 0$ for alle x og $f(x)$ er konveks på hele tallinjen.

Derfor er det stasjonære punktet $x = 0$ et <u>globalt</u> minimumspunkt.

(med global minimumsverdi $f(0) = 3$)