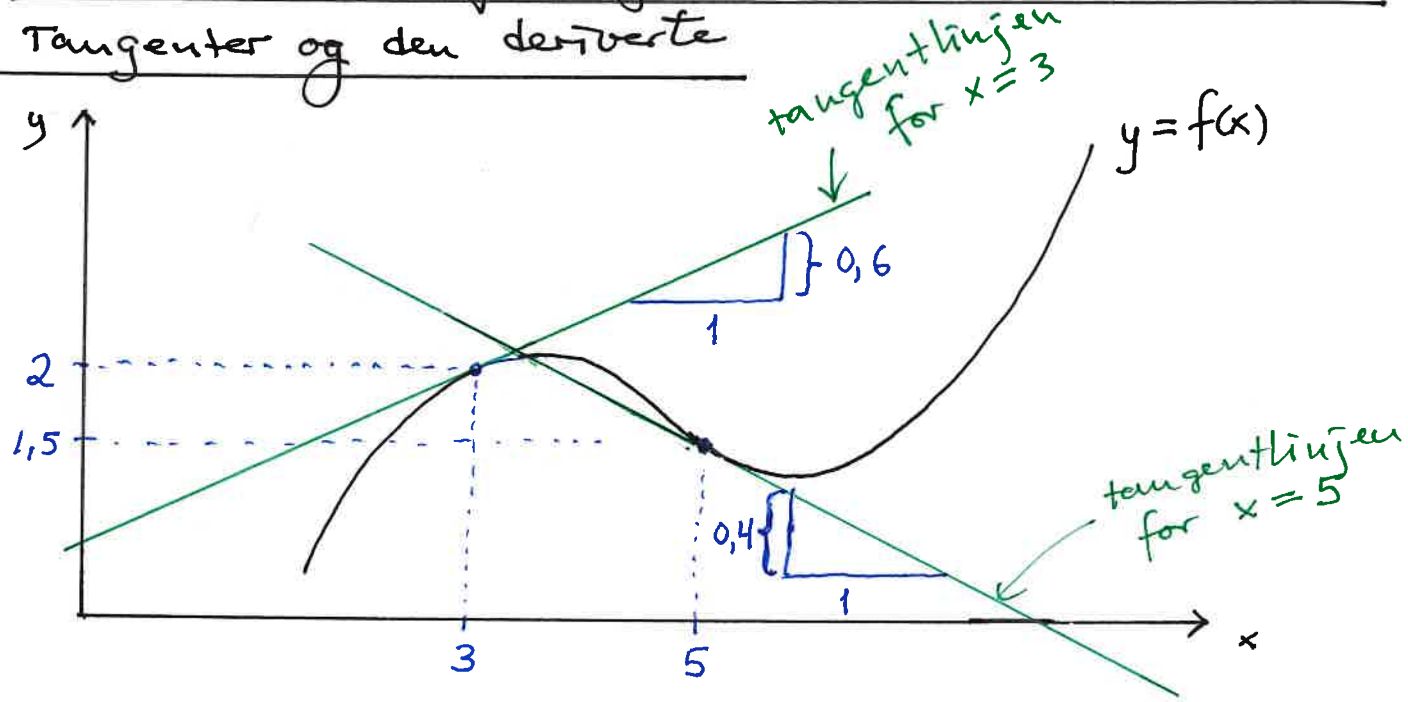
MET 1181, 11. forelesning, 22. okt. 2020, Runar Ile

Plan
1. Tangenter og den deriverte — kap 4.1 (og 4.4)
2. Den deriverte som funksjon — kap 4.2
3. Derivasjonsreglene — kap 4.3

1. Tangenter og den deriverte



I punktet $(3,2)$ har tangenten til $f(x)$ stigningstall $0,6$. Vi skriver $f'(3) = 0,6$

I punktet $(5, 1,5)$ har tangenten til $f(x)$ stigningstall $-0,4$. Vi skriver $f'(5) = -0,4$

To viktige anvendelser

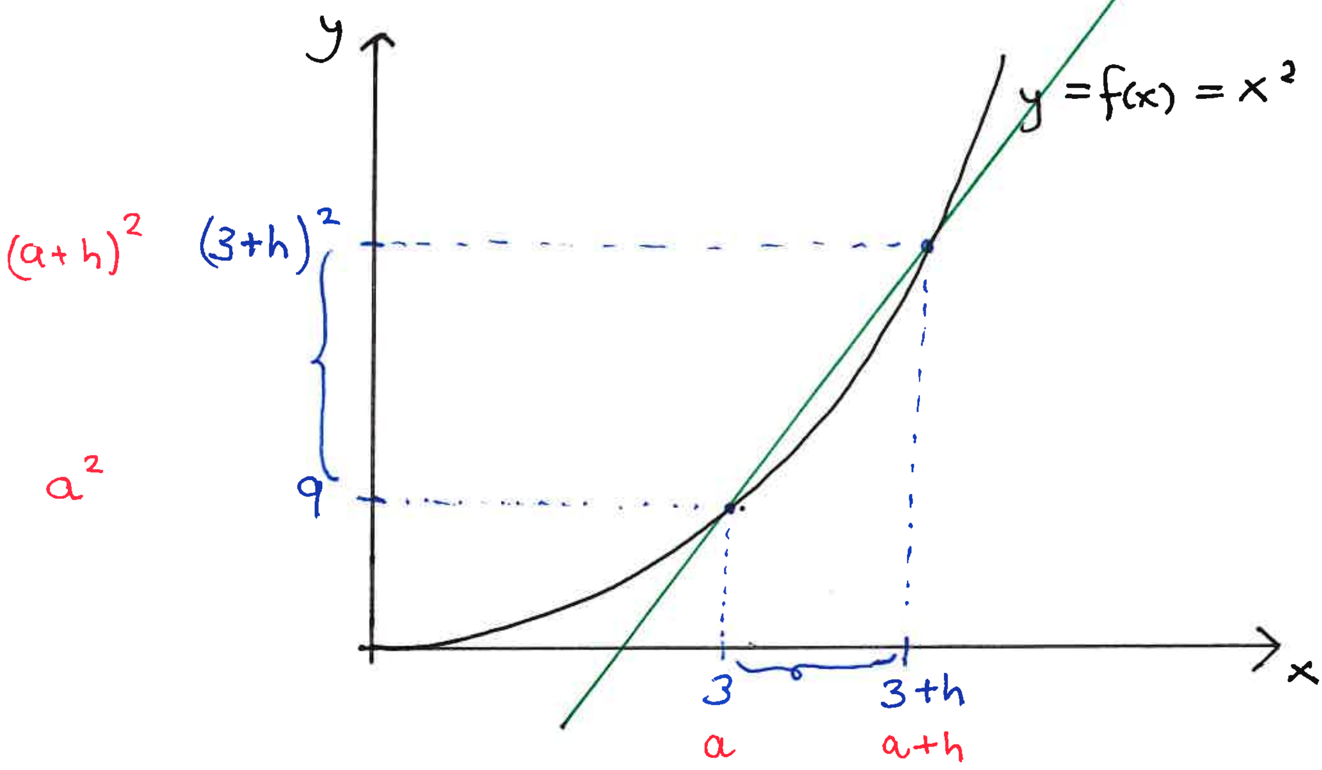
1) Finne hvor funksjonen vokser og avtar og hvor maksimum og minimum er

2) Tilnærme kompliserte funksjoner med lineære funksjoner
   - matematiske modeller i økonomi er ofte lineære

Hvordan finner vi stigningstallet til tangenten?

__Eks__ $f(x) = x^2$ i punktet $(3, 9)$.

Hva er stigningstallet til tangenten?



Stigningstallet til sekantlinjen er

$$\frac{\text{endring i } y}{\text{endring i } x} = \frac{\overset{(a+h)^2 - a^2}{(3+h)^2 - 3^2}}{h} = \frac{\overset{(a+h)(a+h) - a^2}{(3+h)(3+h) - 9}}{h}$$

$$= \frac{\overset{a^2 + 2\cdot a h + h^2 - a^2}{\cancel{9} + 2\cdot 3h + h^2 - \cancel{9}}}{h} = \frac{\overset{2ah + h^2}{6h + h^2}}{h} = \frac{\overset{h(2a+h)}{\cancel{h}(6+h)}}{\cancel{h}}$$

$$= \overset{2a + h}{6 + h} \xrightarrow[h \to 0]{h \to 0} \overset{2a}{6}$$

som derfor er stigningstallet til tangenten til $f(x)$ i $(3, 9)$. Vi skriver $f'(3) = 6$

på samme måte: $f'(a) = 2a$

2. Den deriverte som en funksjon

I eksempelet hadde vi med $f(x) = x^2$ at $x = a$ gir $f'(a) = 2a$

– dette er en funksjon. Vi bruker x som variabel: $\boxed{f'(x) = 2x}$.

F.eks. Stigningstallet til tangenten til $f(x) = x^2$ i $(-3, 9)$ er

$$f'(-3) = 2 \cdot (-3) = \underline{-6}$$

Vi kunne gjort det samme med $\boxed{f(x) = x^3}$

(stig.tallet $\dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \ldots = 3a^2 + 3ah + h^2 \xrightarrow{h \to 0} 3a^2$

så $\boxed{f'(x) = 3x^2}$

3. Derivasjonsregler

Potensregelen

$$\boxed{f(x) = x^n \text{ gir } f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

NB: Gjelder for alle tall n

Eks $f(x) = x^{10}$, $f'(x) = 10 \cdot x^9$

Eks $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$= x^{\frac{1}{3}}$ $\qquad = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

Addisjonsregelen Hvis $f(x) = g(x) + h(x)$

så er $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Eks $f(x) = x + x^3$, $f'(x) = 1 + 3x^2$

Konstantregelen Hvis k er et (konstant) tall

og $f(x) = k \cdot g(x)$

Da er $f'(x) = k \cdot g'(x)$

Eks $k = 7$, $g(x) = x^2$, da er $f(x) = 7x^2$

og $f'(x) = 7 \cdot 2x = 14x$

Produktregelen Hvis $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

så er $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Eks $f(x) = (5x^3 - 2x + 1)(3x + 7)$

Beregner $f'(x)$ ved å bruke produktregelen.

$g(x) = 5x^3 - 2x + 1$ $\quad$ $h(x) = 3x + 7$

$g'(x) = 15x^2 - 2$ $\quad$ $h'(x) = 3$

så $f'(x) = (15x^2 - 2)(3x + 7) + (5x^3 - 2x + 1)(3)$

husk parantesene!

regner

$$= \underline{\underline{60x^3 + 105x^2 - 12x - 11}}$$

<u>Brøkregelen</u> $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

så er $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

<u>Eks</u> $f(x) = \frac{3x+1}{2x+5}$. Finner $f'(x)$ ved å bruke brøkregelen.

$g(x) = 3x+1$ og $h(x) = 2x+5$

$g'(x) = 3$ $h'(x) = 2$

parenteser!

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (2x+5) - (3x+1) \cdot 2}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 - (3x \cdot 2 + 1 \cdot 2)}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{6x + 15 - 6x - 2}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{13}{(2x+5)^2}$$

← vanligvis best å ikke regne ut nevneren!

Kjerneregelen

Hvis $f(x) = g(u(x))$

den ytre funksjonen $g(u)$

den indre funksjonen

Da er

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

hvor $u = u(x)$.

Eks $f(x) = (\underbrace{x^2+2}_{u})^{10}$

Setter $u = u(x) = x^2+2$ og $g(u) = u^{10}$

$u'(x) = 2x$ $g'(u) = 10u^9$

Da er $f'(x) = 10u^9 \cdot 2x$

$$= 10 \cdot (x^2+2)^9 \cdot 2x$$

$$= \underline{\underline{20x(x^2+2)^9}}$$

To funksjoner

$f(x) = e^x$ og $g(x) = \ln(x)$

$f'(x) = e^x$ $g'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$