

## Veiledningsoppgaver

### Oppgave 1.

Regn ut de bestemte integralene, og lag figurer som viser disse som areal:

a)  $\int_0^4 3 \, dx$

b)  $\int_0^8 (10 + 3x) \, dx$

### Oppgave 2.

Regn ut de ubestemte integralene:

a)  $\int x^2 \, dx$

b)  $\int (8x^3 - 12x^2) \, dx$

c)  $\int (e^x - 6x) \, dx$

d)  $\int (x^2/3 - x^3/2) \, dx$

### Oppgave 3.

Finn en funksjon  $f(x)$  med angitt definisjonsområde slik at:

a)  $f'(x) = 2, D_f = (-\infty, \infty)$

b)  $f'(x) = 2x, D_f = (-\infty, \infty)$

c)  $f'(x) = 6x^2, D_f = (-\infty, \infty)$

d)  $f'(x) = 1/x, D_f = (0, \infty)$

e)  $f'(x) = 1/x, D_f = (-\infty, 0)$

f)  $f'(x) = 1/x, D_f = \{x : x \neq 0\}$

### Oppgave 4.

Finn en funksjon  $f(x)$  slik at:

a)  $\int f(x) \, dx = 2 + C$

b)  $\int f(x) \, dx = 2x + C$

c)  $\int f(x) \, dx = 6x^2 + C$

d)  $\int f(x) \, dx = xe^{2x} + C$

e)  $\int 2 \, dx = f(x) + C$

f)  $\int 2x \, dx = f(x) + C$

g)  $\int 6x^2 \, dx = f(x) + C$

h)  $\int xe^{2x} \, dx = f(x) + C$

### Oppgave 5.

Bestem konstantene  $A$  og  $B$  slik at

$$\int \frac{(A + Bx) \cdot e^{2x}}{2\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{x} \cdot e^{2x} + C$$

### Oppgave 6.

Regn ut de ubestemte integralene:

a)  $\int x^{-3} \, dx$

b)  $\int \sqrt{x} \, dx$

c)  $\int x\sqrt{x} \, dx$

d)  $\int 1/x \, dx$

e)  $\int 1/x^2 \, dx$

f)  $\int (x - 2x^3) \, dx$

g)  $\int x(1 - 2x) \, dx$

h)  $x \int (1 - 2x) \, dx$

i)  $\int (x + 1)^2 \, dx$

j)  $\int (x + 1)^7 \, dx$

**Oppgave 7.**

Regn ut disse ubestemte integralene:

$$\text{a) } \int \frac{1-3x^2}{x^2} dx \quad \text{b) } \int \frac{x^3+2x-2}{x} dx \quad \text{c) } \int \frac{6x}{1+3x^2} dx \quad \text{d) } \int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2} dx$$

**Oppgave 8.**

Regn ut disse ubestemte integralene:

$$\text{a) } \int (1+e^{2x}) dx \quad \text{b) } \int e^{1+2x} dx \quad \text{c) } \int e^{1-2x} dx \quad \text{d) } \int 3^x dx$$

**Oppgave 9.**

Regn ut disse ubestemte integralene:

$$\text{a) } \int x\sqrt{x^2+1} dx \quad \text{b) } \int 9(x+1)^7 dx \quad \text{c) } \int xe^{-x^2} dx \quad \text{d) } \int \frac{x}{1+x^2} dx \quad \text{e) } \int \frac{\ln x}{x} dx$$

**Oppgave 10.**

Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

**Oppgave 11.**

Anta at  $f(x) \geq 0$  for alle  $x$ , og at  $F(x)$  er en funksjon slik at  $\int f(x) dx = F(x) + C$ . Er  $F(x)$  en voksende funksjon? Forklar hvorfor/hvorfor ikke.

**Oppgave 12.**

Vi ser på funksjonen definert ved

$$f(x) = \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

- Regn ut  $f'(x)$ .
- Vis at  $f$  er avtagende i definisjonsområdet  $D_f = (0, \infty)$ .
- Bestem grenseverdiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

- Lag en grov skisse av grafen til  $f$ , basert på det du har funnet ut tidligere i oppgaven, og markér området som ligger mellom grafen til  $f$  og  $x$ -aksen (for  $x > 0$ ) på tegningen.

**Oppgave 13.**Skriv ned en sum (basert på minst  $n = 10$  delintervall) som tilnærmer det bestemte integralet

$$\int_0^1 (1-x^2) dx$$

og vis det bestemte integralet og tilnærmingen som arealer i en figur.

**Oppgave 14.**

Oppgaver fra læreboken: 5.1.1 - 5.1.5, 5.2.1 - 5.2.5, 5.3.1 - 5.3.3

## Svar på veiledningsoppgaver

### Oppgave 1.

a) 12

b) 176

### Oppgave 2.

a)  $\frac{1}{3}x^3 + \mathcal{C}$

b)  $2x^4 - 4x^3 + \mathcal{C}$

c)  $e^x - 3x^2 + \mathcal{C}$

d)  $\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{C}$

### Oppgave 3.

a)  $f(x) = 2x$

b)  $f(x) = x^2$

c)  $f(x) = 2x^3$

d)  $f(x) = \ln(x)$

e)  $f(x) = \ln(-x)$

f)  $f(x) = \ln|x|$

### Oppgave 4.

a)  $f(x) = 0$

b)  $f(x) = 2$

c)  $f(x) = 12x$

d)  $f(x) = (1 + 2x)e^{2x}$

e)  $f(x) = 2x$

f)  $f(x) = x^2$

g)  $f(x) = 2x^3$

h)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$

### Oppgave 5.

$A = 1, B = 4$

### Oppgave 6.

a)  $-\frac{1}{2}x^{-2} + \mathcal{C}$

b)  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \mathcal{C}$

c)  $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \mathcal{C}$

d)  $\ln|x| + \mathcal{C}$

e)  $-1/x + \mathcal{C}$

f)  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{C}$

g)  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \mathcal{C}$

h)  $x(x - x^2 + \mathcal{C})$

i)  $\frac{1}{3}(x+1)^3 + \mathcal{C}$

j)  $\frac{1}{8}(x+1)^8 + \mathcal{C}$

### Oppgave 7.

a)  $-1/x - 3x + \mathcal{C}$

b)  $\frac{1}{3}x^3 + 2x - 2\ln|x| + \mathcal{C}$

c)  $\ln(1 + 3x^2) + \mathcal{C}$

d)  $-2/\sqrt{x} - 1/x + \mathcal{C}$

### Oppgave 8.

a)  $x + \frac{1}{2}e^{2x} + \mathcal{C}$

b)  $\frac{1}{2}e^{1+2x} + \mathcal{C}$

c)  $-\frac{1}{2}e^{1-2x} + \mathcal{C}$

d)  $\frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x + \mathcal{C}$

### Oppgave 9.

a)  $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + \mathcal{C}$

b)  $\frac{9}{8}(x+1)^8 + \mathcal{C}$

c)  $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + \mathcal{C}$

d)  $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \mathcal{C}$

e)  $\frac{1}{2}\ln(x)^2 + \mathcal{C}$

### Oppgave 10.

$-2e^{1-\sqrt{x}} + \mathcal{C}$

### Oppgave 11.

Siden  $F'(x) = f(x)$  og  $f(x) \geq 0$ , er  $F$  en voksende funksjon.

**Oppgave 12.**

a.  $f'(x) = \frac{e^{1-\sqrt{x}}(-\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}}$

b. Siden  $f'(x) \leq 0$  for  $x > 0$  er  $f$  avtagende

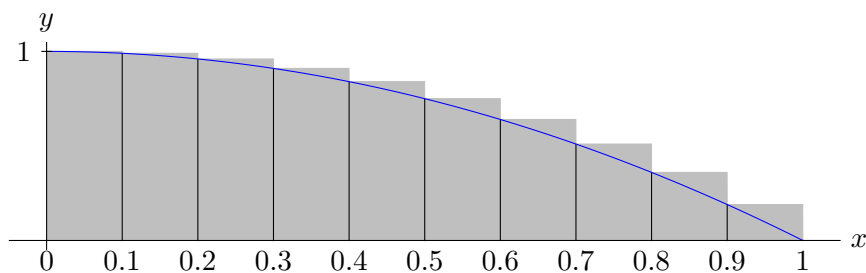
c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

**Oppgave 13.**

Hvis vi deler intervallet  $[0,1]$  inn i  $n = 10$  like store delintervall, så blir delepunktene  $x_i = i/10$  for  $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ . Det vil si at  $x_0 = 0, x_1 = 1/10, x_2 = 2/10$  og så videre. Det bestemte integralet er arealet under  $f(x) = 1 - x^2$  på intervallet  $[0,1]$ . Vi kan tilnærme dette som arealet av ti rektangler, gitt ved summen

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^9 f(x_i) \cdot \Delta x_i &= \sum_{i=0}^9 (1 - (i/10)^2) \cdot \frac{1}{10} = (1 + (1 - 1/100) + (1 - 4/100) + \dots + (1 - 81/100)) \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left( 10 - \frac{0 + 1 + 4 + \dots + 81}{100} \right) = 0.715 \end{aligned}$$

Summen er vist i figuren nedenfor. Det bestemte integralet er arealet under den blå kurven, altså litt mindre enn 0.715. Valget  $n = 10$  er ikke viktig, men tilnærmingen blir bedre jo større  $n$  er.

**Oppgave 14.**

Fullstendig løsning av oppgaver fra læreboken [E] finnes i oppgaveboken [O].