MET1181 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2019
Oppgaver

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 13

Kap 4.5, 4.7: Implisitt derivasjon. Den annenderiverte og konvekse/konkave funksjoner.

Under står det anbefalte oppgaver fra læreboken [L] og noen eksamensoppgaver. Oppgaveboken innholder løsningsforslag til alle oppgavene i læreboken og noen flere oppgaver.

[L] **4.5** 1-3
[L] **4.7** 1-11
Flervalgseksamen 2016v oppg 15
Flervalgseksamen 2016h oppg 11
Flervalgseksamen 2017v oppg 11

Oppgaver for veiledningstimene mandag 28/10 fra kl 14 i Study Area

Oppgave 1 Uttrykk y' ved hjelp av y og x ved implisitt derivasjon. Finn alle løsninger for y gitt at $x = a$ og bestem funksjonsuttrykkene for tangentene i disse punktene.

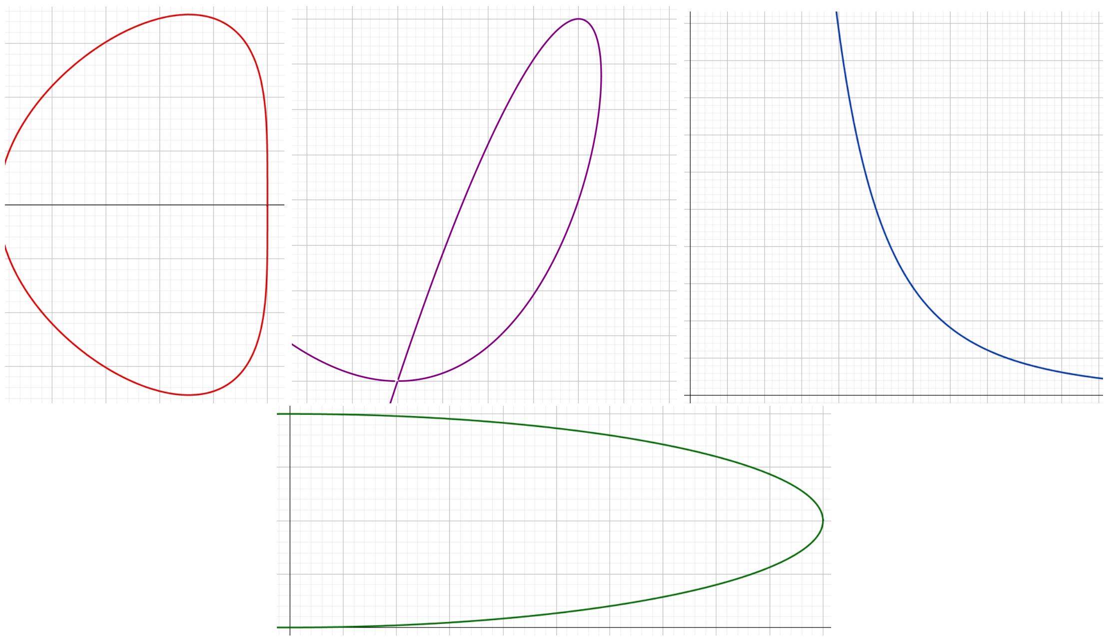
a) $x^2 + 25y^2 - 50y = 0$ og $a = 4$

b) $x^{3,27}y^{1,09} = 1$ og $a = 1$

c) $x^4 - x^2 + y^4 = 0$ og $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $x^3 - 3xy + y^2 = 0$ og $a = 2$

Oppgave 2 I figur 1 ser du grafene til de implisitt definerte kurvene i oppgave 1. Finn kurvene og likningene som hører sammen. Tegn også inn tangentene fra oppgave 1.



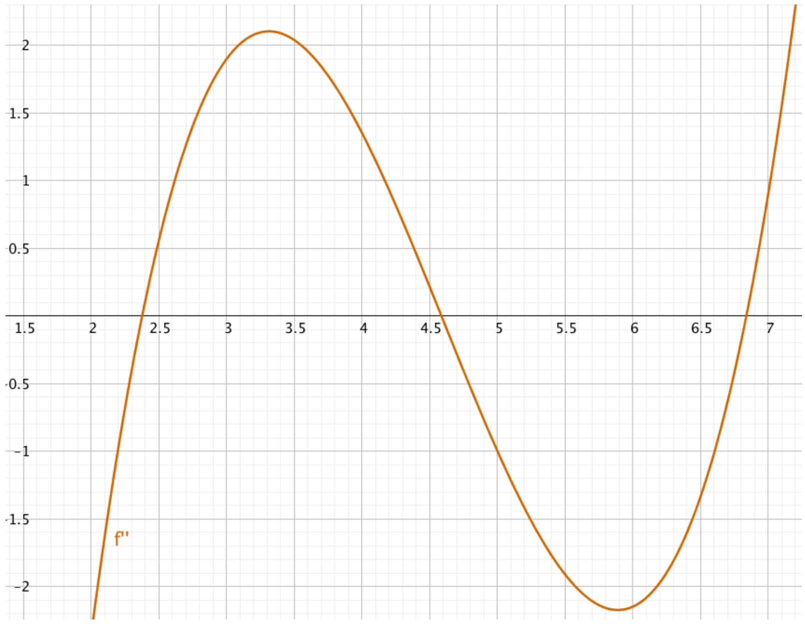
Figur 1: Fire implisitt definerte kurver

Oppgave 3 Tegn en grov skisse av grafene til **to** forskjellige funksjoner $f(x)$ med de oppgitte dataene. En av de to funksjonene skal være *strengt voksende*. NB: Du skal ikke finne noe funksjonsuttrykk!

a) $f''(x)$ er negativ for $x < 5$ og positiv for $x > 5$

b) $f''(x)$ er positiv for $x < 10$, negativ for $10 < x < 15$ og positiv for $x > 15$

Oppgave 4 I figur 2 ser du grafen til $f''(x)$. Avgjør hvilke utsagn som er sanne.



Figur 2: Grafen til $f''(x)$

a) $f''(2{,}5) > f''(4)$

b) $f(x)$ er konveks for $3 \leqslant x \leqslant 4$

c) $f(x)$ har ingen vendepunkt mellom 5,5 og 6

d) $f(x)$ har to vendepunkter for $2 \leqslant x \leqslant 7$

e) $f(x)$ er konkav for $6 \leqslant x \leqslant 6{,}5$

f) $f'(4)$ er maksimum til $f'(x)$ for $x \in [3, 4]$

g) $f'(x)$ avtar i intervallet $[4, 5]$

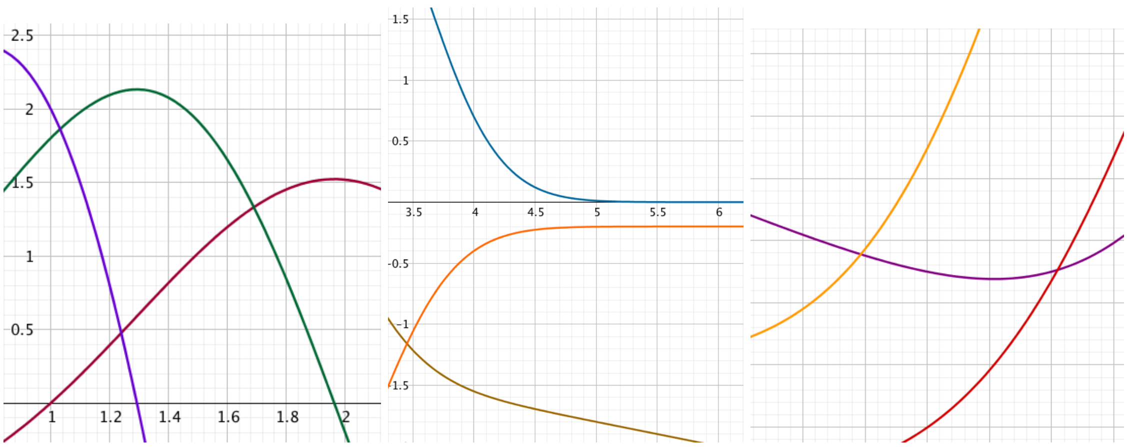
h) $f'(x)$ vokser raskere rundt $x = 2{,}5$ enn rundt $x = 3$

i) $f(4)$ må være positiv

j) $f'(2{,}5) < f'(4{,}5)$

k) $f(x)$ må ha minst ett lokalt minimumspunkt

Oppgave 5 I figur 3 ser du grafene til $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$ i samme koordinatsystem. Avgjør hvilken som er grafen til $f(x)$, til $f'(x)$ og til $f''(x)$ i (a-c).



Figur 3: (a-c): Grafene til $f(x)$, $f'(x)$ og til $f''(x)$

Oppgave 6 Beregn $f'(x)$ og $f''(x)$, løs likningen $f''(x) = 0$, avgjør hvor $f(x)$ er konveks og konkav, og finn eventuelle vendepunkter.

a) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 1$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) - \frac{x}{4} + 1$

c) $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} + x + 1$

d) $f(x) = x^5 - 10x^4 + 30x^3 + 2$

Oppgave 7 Finn funksjonsutrykkene for vendetangentene i oppgave 6.

Oppgave 8 Bestem (lokale) minimumspunkter og maksimumspunkter for funksjonen $f(x)$. Forklar hvorfor disse punktene gir minimum/maksimum til $f(x)$ ved å bruke konveksitet/konkavitet av funksjonen. Beregn minimum/maksimum til funksjonen.

a) $f(x) = \ln(-x^2 + 14x - 45)$ med $D_f = \langle 5, 9\rangle$

b) $f(x) = \frac{-1}{x(x-6)}$ med $D_f = \langle 0\,, 6\rangle$

c) $f(x) = e^{x(x-4)}$ med $D_f = \mathbb{R}$ (alle reelle tall)

Oppgave 9 Beregn uttrykket for den deriverte funksjonen til $f(x)$.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 13}$

b) $f(x) = xe^{0,1x^2}$

c) $f(x) = (2x + 5)^{100}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

Oppgave 10 (Flervalgseksamen 2018v, oppg 11)
Vi betrakter funksjonen gitt ved $f(x) = 4\sqrt{x}\ln(x)$. Hvilket utsagn er sant?
(A) Funksjonen f har ett vendepunkt
(B) Funksjonen f har flere vendepunkter
(C) Funksjonen f er konkav
(D) Funksjonen f er konveks
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Fasit

Oppgave 1

a) $y' = \frac{-x}{25(y-1)}$, for $x = 4$ er $y = \frac{2}{5}$ eller $y = \frac{8}{5}$ som gir tangentene $h_1(x) = \frac{4}{15}x - \frac{2}{3}$ og $h_2(x) = -\frac{4}{15}x + \frac{8}{3}$

b) $y' = \frac{-3y}{x}$, for $x = 1$ er $y = 1$ som gir tangenten $h(x) = -3x + 4$

c) $y' = \frac{x(1-2x^2)}{2y^3}$, for $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ er $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ som gir tangentene $h_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $h_2(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $y' = \frac{3(y-x^2)}{2y-3x}$, for $x = 2$ er $y = 4$ eller $y = 2$ som gir tangentene $h_1(x) = 4$ og $h_2(x) = 3x - 4$

Oppgave 2

a) Grønn

b) Blå

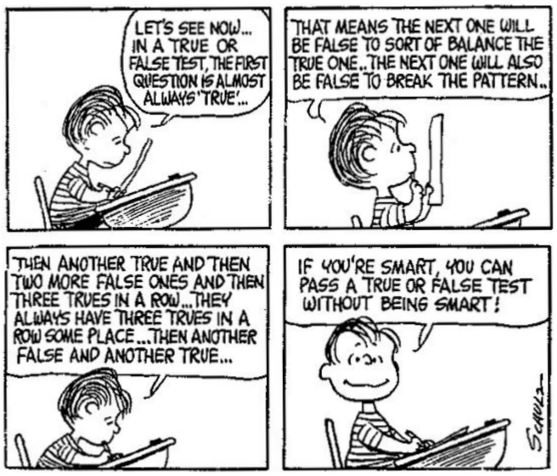
c) Rød

d) Purpur

Oppgave 3

Sammenlign med andre studenter, spør veilederne!

Oppgave 4



Figur 4: True or false, or opposite

Oppgave 5

a) $f(x)$: Mørk rød, $f'(x)$: Grønn
b) $f(x)$: Oliven, $f'(x)$: Oransje
c) $f(x)$: Fiolett, $f'(x)$: Rød

Oppgave 6

a) $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ og $f''(x) = 12(x-1)(x-3)$. $f''(x) = 0$ har løsninger $x = 1$ og $x = 3$. $f(x)$ er konveks i intervallet $\langle \infty, 1]$, $f(x)$ er konkav i intervallet $[1, 3]$, og $f(x)$ er konveks i intervallet $[3, \infty\rangle$. Dermed er $x = 1$ og $x = 3$ vendepunkter.

b) $f'(x) = \frac{2x-2}{(x-1)^2+1} - \frac{1}{4}$ og $f''(x) = \frac{-2x(x-2)}{[(x-1)^2+1]^2}$. $f''(x) = 0$ har løsninger $x = 0$ og $x = 2$. $f(x)$ er konkav i intervallet $\langle \infty, 0]$, $f(x)$ er konveks i intervallet $[0, 2]$, og $f(x)$ er konkav i intervallet $[2, \infty\rangle$. Dermed er $x = 0$ og $x = 2$ vendepunkter.

c) $f'(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} + 1$ og $f''(x) = (x+1)(x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f''(x) = 0$ har løsninger $x = \pm 1$, $f(x)$ er konveks i intervallet $\langle \infty, -1]$, $f(x)$ er konkav i intervallet $[-1, 1]$, og $f(x)$ er konveks i intervallet $[1, \infty\rangle$. Dermed er $x = -1$ og $x = 1$ vendepunkter.

d) $f'(x) = 5x^4 - 40x^3 + 90x^2$ og $f''(x) = 20x(x-3)^2$. $f''(x) = 0$ har løsninger $x = 0$ og $x = 3$ (dobbeltrot). $f(x)$ er konkav i intervallet $\langle \infty, 0]$ og $f(x)$ er konveks i intervallet $[0, \infty\rangle$. Dermed er $x = 0$ eneste vendepunkt.

Oppgave 7

a) Vendetangenter: $h_1(x) = 16x - 4$ og $h_3(x) = 28$
b) Vendetangenter: $h_0(x) = -1{,}25x + \ln(2) + 1$ og $h_2(x) = 0{,}75x + \ln(2) - 1$
c) Vendetangenter: $h_{-1}(x) = (1 + e^{-0{,}5})x + 2e^{-0{,}5} + 1$ og $h_1(x) = (1 - e^{-0{,}5})x + 2e^{-0{,}5} + 1$
d) Vendetangent: $h_0(x) = 2$

Oppgave 8

a) $f'(x) = \frac{2(7-x)}{-x^2+14x-45}$ som skifter fortegn fra + til − ved $x = 7$. $f''(x) = \frac{-2[(x-7)^2+4]}{(-x^2+14x-45)^2}$ er negativ for alle x, så $f(x)$ er konkav, maks: $f(7) = 2\ln(2) = 1{,}39$

b) $f'(x) = \frac{2x-6}{x^2(x-6)^2}$ som skifter fortegn fra − til + ved $x = 3$. $f''(x) = \frac{-6[(x-3)^2+3]}{x^3(x-6)^3}$ er positiv for alle $x \in \langle 0, 6\rangle$, så $f(x)$ er konveks, min: $f(3) = \frac{1}{9} = 0{,}11$

c) $f'(x) = 2(x-2)e^{x(x-4)}$ som skifter fortegn fra − til + ved $x = 2$. $f''(x) = 4[(x-2)^2 + \frac{1}{2}]e^{x(x-4)}$ er positiv for alle x, så $f(x)$ er konveks, min: $f(2) = e^{-4} = 0{,}02$

Oppgave 9

a) $f'(x) = \dfrac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+13}}$
b) $f'(x) = \dfrac{1}{5}(x^2+5)e^{0{,}1x^2}$
c) $f'(x) = 200(2x+5)^{99}$
d) $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

Oppgave 10

A