MET 1181, 9. forelesning, 4. okt 2019, Runar Ile

1. Repetisjon/oppgaver
2. Rasjonale funksjoner, hyperbler og asymptoter — kap 3.9
3. Kontinuitet og skjæringssetningen — kap 3.10
4. Sammensatte funksjoner — kap. 3.11

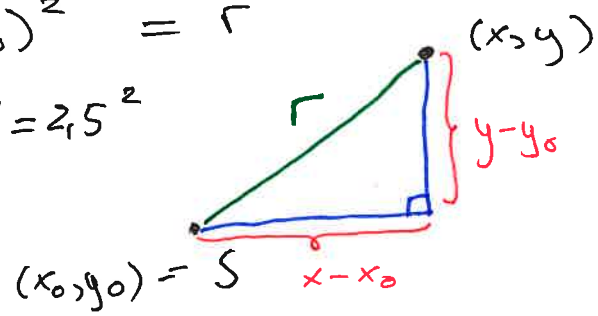
1. Rep/opp.

Oppg 1c $S = (-3{,}5\ ,\ -3)\ ,\ r = 2{,}5$

Mønster: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

Setter inn: $(x-(-3{,}5))^2 + (y-(-3))^2 = 2{,}5^2$

dvs $\underline{\underline{(x+3{,}5)^2 + (y+3)^2 = 6{,}25}}$



2f) $25x^2 + 25y^2 - 20x - 30y = -12$

samler x-ene og y-ene

$$25\left(x^2 - \frac{20}{25}x\right) + 25\left(y^2 - \frac{30}{25}y\right) = -12 \qquad \frac{20}{25} = \frac{4}{5},\ \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

fullfører kvadratene inne i parantesene

$$25\left(\left(x-\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) + 25\left(\left(y-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) = -12$$

mult. inn i parantesene og 'flytter over' konstantene

$$25\left(x-\frac{2}{5}\right)^2 + 25\left(y-\frac{3}{5}\right)^2 = -12 + 25\cdot\frac{4}{25} + 25\cdot\frac{9}{25}$$

$$= -12 + 4 + 9 = 1$$

deler på 25 på b.s.

$$\left(x-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

Nå er likningen på standard form

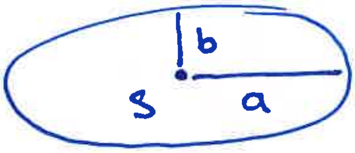
og vi leser $\underline{\underline{S = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad r = \frac{1}{5}}}$

Ellipser:

3b) $S = (15, 10)$, $a = 15$ og $b = 10$

Mønster: $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Setter inn: $$\underline{\underline{\frac{(x-15)^2}{225} + \frac{(y-10)^2}{100} = 1}}$$



4g) $25x^2 + 4y^2 - 100x - 40y = -100$

samler x-ene og y-ene for seg

$$25\left(x^2 - \overset{=4}{\frac{100}{25}}x\right) + 4\left(y^2 - \overset{=10}{\frac{40}{4}}y\right) = -100$$

fullfører kvadratene inne i parantesene

$$25\left((x-2)^2 - 2^2\right) + 4\left((y-5)^2 - 5^2\right) = -100$$

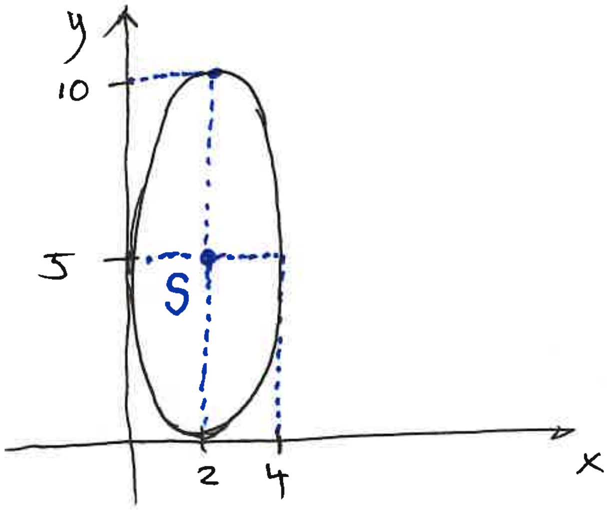
ganger inn i parantesene og 'flytter over' konstanten

$$25(x-2)^2 + 4(y-5)^2 = -100 + 25\cdot 4 + 4\cdot 25 = 100$$

Deler på 100 på b. s.

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

Så $\underline{\underline{S = (2, 5),}}$ $\underline{\underline{a = \sqrt{4} = 2 \text{ og } b = \sqrt{25} = 5}}$



2. Rasjonale funksjoner, hyperbler & asymptoter

Rasjonal funksjon $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ polynomer

<u>Eks</u>: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$

Fordi $f(x) = \dfrac{\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \dfrac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{X^2}} \xrightarrow[x \to \infty]{} \dfrac{0^+}{1^+} = 0^+$

deler på x^2 i teller og nevner

$\xrightarrow[x \to -\infty]{} \dfrac{0^-}{1^+} = 0^-$

$$f(1000) = \frac{\frac{2}{1000} + \frac{1}{1000^2}}{1 + \frac{3}{1000^2}} = 0{,}00200099$$

Dette betyr at linjen $y = 0$ (x-aksen)
er horisontal asymptote.

Eks: $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)\cdot(x-5)}$ $(x \neq 1,\ x \neq 5)$

Hvis $x \to 1^-$ (x nærmer seg 1 nedenfra)

0,9 0,99 0,999 ....

Da vil:

$x-1 \to 0^-$ (x nærmer seg 0 nedenfra)

−0,1 −0,01 −0,001 ....

$2x+1 \to 3^-$

$x-5 \to -4^-$

Dermed vil: $f(x) = \dfrac{\overbrace{2x+1}^{\to 3^-}}{\underbrace{(x-1)}_{0^-}\cdot\underbrace{(x-5)}_{-4^-}} \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$x-1$	−1	−0,5	−0,1	−0,01	−0,001	−0,0001
$2x+1$	1	2	2,8	2,98	2,998	2,9998

Hvis $x \to 1^+$ (x nærmer seg 1 ovenfra)

Så vil $x-1 \to 0^+$, $2x+1 \to 3^+$, $x-5 \to -4^+$

Altså vil $f(x) = \dfrac{\overbrace{2x+1}^{\to 3^+}}{\underbrace{(x-1)}_{0^+}\underbrace{(x-5)}_{-4^+}} \xrightarrow[x \to 1^+]{} -\infty$

Konklusjon: $x = 1$ og $x = 5$ er vertikale asymptoter for $f(x)$.

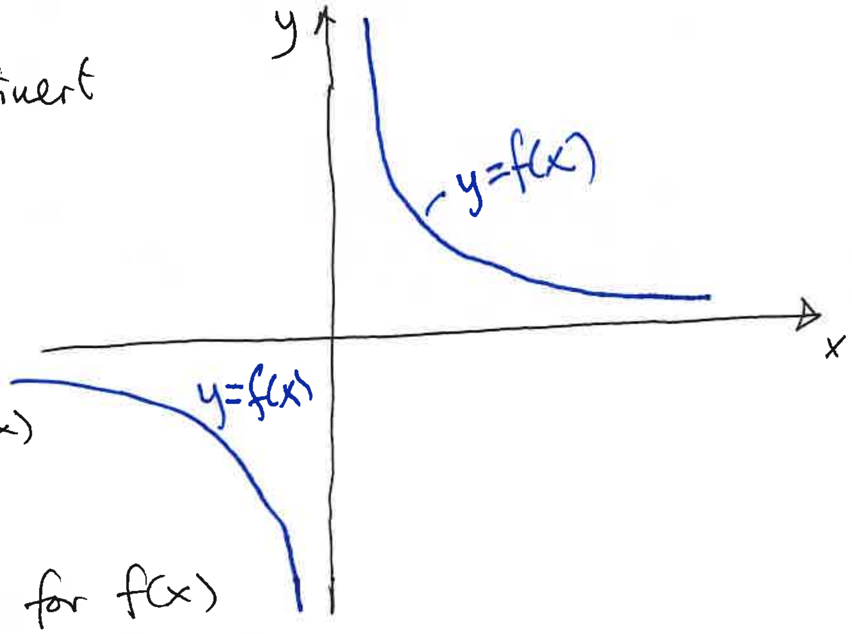
<u>Hyperbler</u> $f(x) = \frac{1}{x}$

x	1	2	-1	-2	10	-10	$0{,}1$	$-0{,}1$	$0{,}01$
$f(x)$	$\frac{1}{1}=1$	$0{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0{,}1$	$-0{,}1$	10	-10	100

NB: $f(x)$ er ikke definert for $x = 0$

Linjen $x=0$ er en vertikal asymptote for $f(x)$

Linjen $y=0$ er en horisontal asymptote for $f(x)$

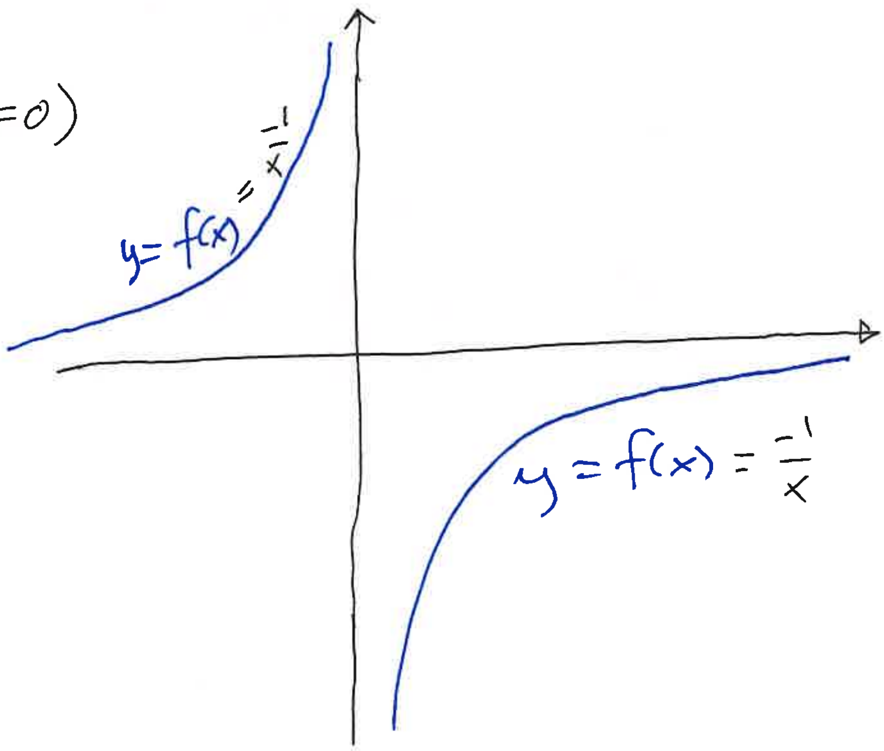


Eks: $f(x) = \frac{-1}{x}$ $(x \neq 0)$

Ser at

$$f(x) = \frac{-1}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0^-$$

$$f(x) = \frac{-1}{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^+$$



Eks: $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$ – også en hyperbel!

Polynomdivisjon:

$$(3x-5) : (x-2) = 3 + \frac{1}{x-2}$$
$$\underline{-(3x-6)}$$
$$1 \quad \text{(resten)}$$

– en hyperbel med vertikal asymptote $x = 2$ og horisontal asymptote $y = 3$

Skrå asymptoter

Eks: $f(x) = x - 5 + \dfrac{2}{x-4}$ har vertikal asymptote for $x = 4$

Setter $g(x) = x - 5$

Fordi $f(x) - g(x) = \dfrac{2}{x-4} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$

Sier at $y = g(x)$ er en skrå asymptote for $f(x)$.

NB: $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x + 22}{x-4}$

– bruker polynomdivisjon for å få formen

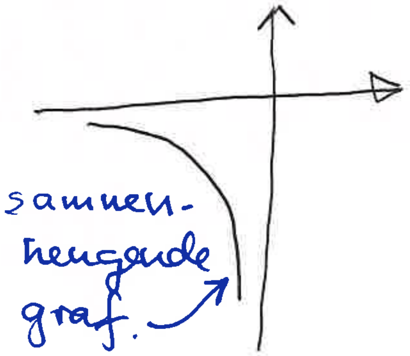
$$x - 5 + \frac{2}{x-4}$$

3. Kontinuitet og skjæringssetningen

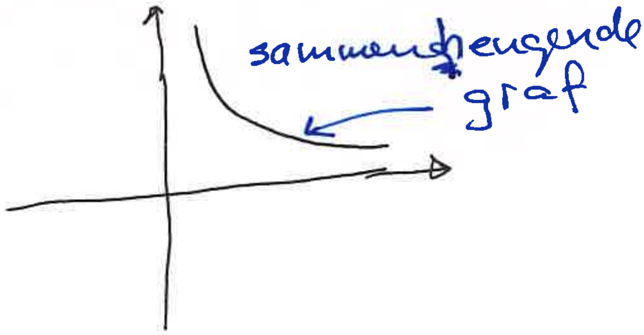
En funksjon er kontinuerlig hvis grafen er sammenhengende for alle intervaller i definisjonsområdet.

Eks: $f(x) = \frac{1}{x}$ er definert for alle $x \neq 0$.
dvs $x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$

For $x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle$

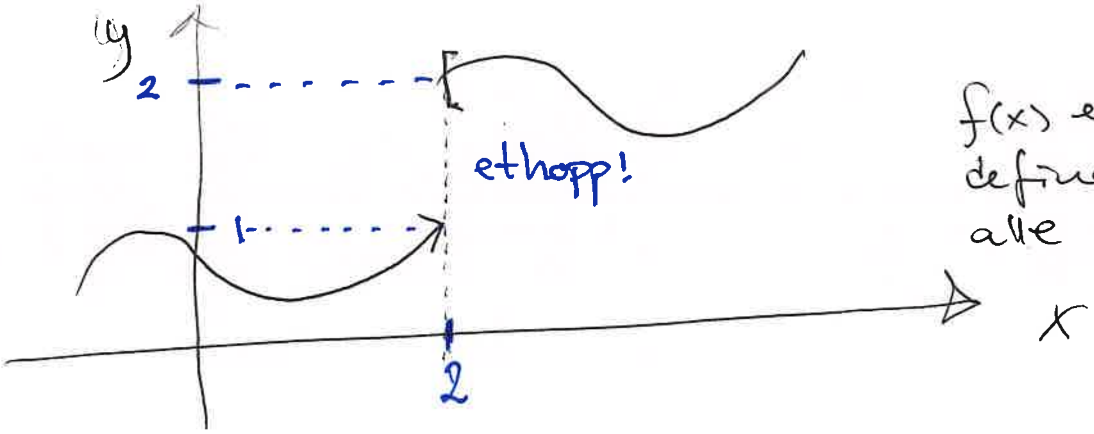


For $x \in \langle 0, \rightarrow \rangle$



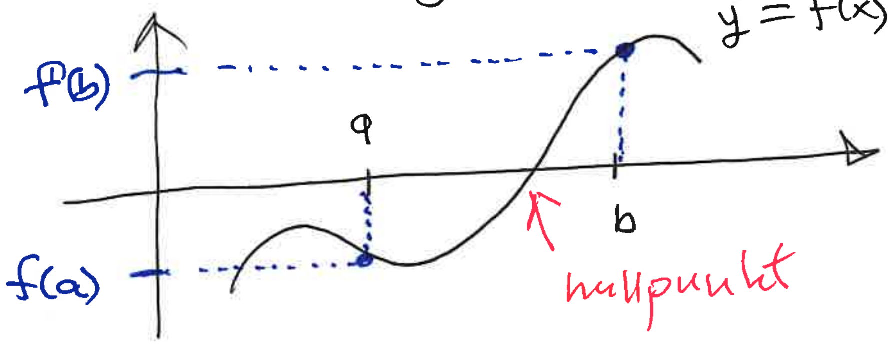
Alle „vanlige" funksjoner er kontinuerlige.

Hvis f(x) „hopper" er den ikke kontinuerlig:



f(x) er definert for alle x

Skjæringssetningen Hvis $f(x)$ er kontinuerlig i et intervall I og a og b ligger i I med $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$ så finnes det et nullpunkt for $f(x)$ mellom a og b.



Eks: $f(x) = x\sqrt{2x+5} - \frac{10}{x}$ har et nullpunkt mellom $x = 1$ og $x = 10$ fordi

- $f(1) = 1 \cdot \sqrt{2 \cdot 1 + 5} - \frac{10}{1} = \sqrt{7} - 10 < 0$
- $f(10) = 10\sqrt{2 \cdot 10 + 5} - \frac{10}{10} = 10 \cdot 5 - 1 > 0$
- $f(x)$ er kontinuerlig for $x > 0$

Da gir skjæringssetningen at det finnes et nullpkt. mellom 1 og 10.