MET 1181, forelesning 8, 30. sept. 2019, Runar Ile

1. oppg. fra veiledningen
2. Voksende og avtagende funksjoner kap. 3.6
3. Sirkler og ellipser 3.7
4. Polynomfunksjoner 3.8

1. oppg. fra veiledningen

oppg 3a Fordi vi har to klare nullpunkter er

$$f(x) = a(x - \underbrace{r_1)(x - r_2}_{\text{nullpunktene}}) = a(x-2)(x-5)$$

$f(0) = 5$ dvs $a(0-2)(0-5) = 5$

dvs $a \cdot 10 = 5$

dvs $a = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

så $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-5)$

3b) Vi ser at $x = 2$ er et nullpunkt og at $x = -\frac{1}{2}$ er symmetriaksen.

Da må det andre nullpunktet være $x = -\frac{1}{2} - 2{,}5 = -3$.

Altså er $f(x) = a(x-2)(x+3)$.

Ser at $f(0) = 6$, dvs $a \cdot (0-2) \cdot (0+3) = 6$

dvs $a \cdot (-6) = 6$

dvs $a = \frac{6}{-6} = -1$

så $f(x) = -(x-2)(x+3)$

c) Vi ser at $x=100$ er en dobbeltrot, så

$$f(x) = a(x-100)(x-100) = a(x-100)^2$$

Fordi $(80, 40)$ ligger på grafen vil

$f(80)=40$, dvs $a\cdot(80-100)^2 = 40$

dvs $a\cdot(-20)^2 = 40$

dvs $a\cdot 400 = 40$

dvs $a = \frac{40}{400} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

så $\underline{f(x) = \frac{1}{10}(x-100)^2}$

d) Vi ser at $x=1$ gir symmetriaksen og at maksimumsverdien er $y=-1$

Da er $f(x) = a(x-s)^2 + d$

$= a(x-1)^2 + (-1)$

Fordi $(0,-2)$ ligger på grafen får vi

$f(0) = -2$, dvs $a(0-1)^2 - 1 = -2$

dvs $a - 1 = -2$

dvs $a = -2+1 = -1$

så $\underline{\underline{f(x) = -(x-1)^2 - 1}}$

e) Symmetriaksen er $x=-3$

minimumsverdien er $y = 4{,}25$, så

$f(x) = a(x+3)^2 + 4{,}25$.

Fordi $(-2, 4{,}5)$ ligger på grafen får vi

$f(-2) = 4{,}5$. dvs $a(-2+3)^2 + 4{,}25 = 4{,}5$

så $a = 4{,}5 - 4{,}25 = 0{,}25$ og $\underline{\underline{f(x) = 0{,}25(x+3)^2 + 4{,}25}}$

f) symmetrilinjen er $x = 50$
minimumsverdien er $y = 1$
så $f(x) = a(x-50)^2 + 1$

Vi ser at $(40, 2)$ ligger på grafen, så
$f(40) = 2$, dvs $a(40-50)^2 + 1 = 2$
dvs $a \cdot 100 = 2 - 1 = 1$
dvs $a = \frac{1}{100}$

Altså er $f(x) = \frac{1}{100}(x - 50)^2 + 1$

Oppg 7a Tre punkter på grafen: $P = (0, 7)$
$Q = (1, 4)$
Vet lite, bruker formen $R = (2, 3)$
$f(x) = ax^2 + bx + c$

P: $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 7$
dvs $c = 7$.

Q: $f(1) = 4$, dvs $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 7 = 4$
dvs $\boxed{a + b = -3}$ (1)

R: $f(2) = 3$, dvs $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 7 = 3$
dvs $\boxed{4a + 2b = -4}$ (2)

Løser ~~likning~~ dette likningssettet.
Fra (1) får vi $4a + 4b = -12$ (mult. (1) m. 4)
trekker fra (2) $4a + 2b = -4$
$0 \cdot a + 2b = -12 - (-4) = -8$

Så $2b = -8$, dvs $b = \frac{-8}{2} = \underline{-4}$

Fra (1) $a = -3-(-4) = \underline{1}$

Så $f(x) = \underline{\underline{x^2 - 4x + 7}}$

<u>Oppsummering</u> (andregradsfunksjoner)

<u>3 standardformer:</u>

A) Hvis vi kjenner røttene: $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$

B) Hvis vi kjenner symmetriaksen og maks(min)-verdien: $f(x) = a(x-s)^2 + d$

C) Andre tilfeller: $f(x) = ax^2 + bx + c$

(Men vi kan bruke B uansett).

<u>2. Voksende og avtagende funksjoner</u>

<u>Eks:</u> $f(x) = 0{,}03x^2 + 8x - 1500$, $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ (dvs $x \geq 0$)

Vokser $f(x)$ i hele D_f?

Avtar $f(x)$ i hele D_f?

Eller ingen av delene?

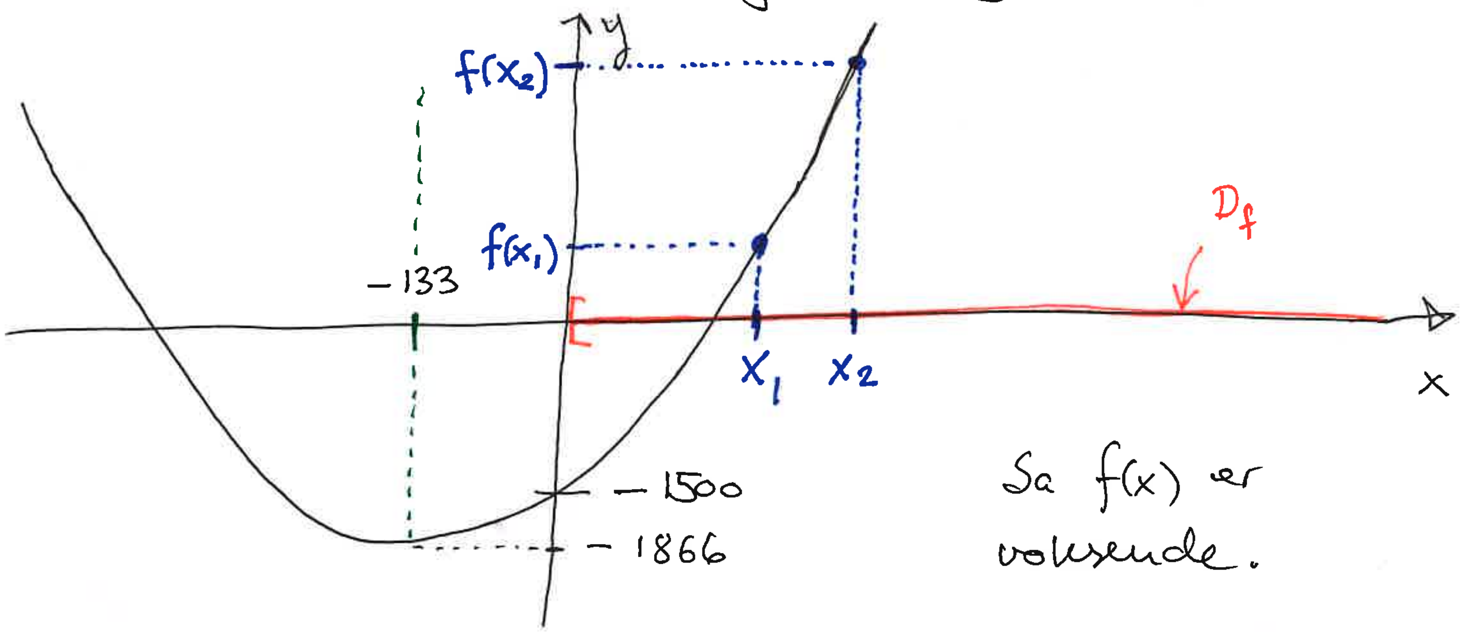
– kan f.eks. se på grafen i GeoGebra el.

Eller vi kan fullføre kvadratet (og så tegne grafen):

Får $f(x) = 0{,}03\left(x + \frac{800}{6}\right)^2 - \frac{5600}{3}$

Symmetriaksen er gitt av $x = -\frac{800}{6} \approx -133$

minimumsverdien er $y = -\frac{5600}{3} \approx -1866$



Så $f(x)$ er voksende.

<u>Definisjon:</u> En funksjon $f(x)$ er <u>voksende</u> hvis for <u>alle</u> $x_1 < x_2$ så er $f(x_1) \leq f(x_2)$.

<u>Eks:</u> $f(x) = 2x + 5$ er voksende (D_f er hele tallinjen)

Begrunnelse: Hvis $x_1 < x_2$ så

multipliserer med 2 på b.s.

$$2x_1 < 2x_2$$

legger til 5 på b.s.

$$f(x_1) = 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 = f(x_2)$$

så $f(x)$ er (strengt) voksende.

Definisjon En funksjon $f(x)$ er avtagende hvis for alle $x_1 < x_2$ så er $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Oppg: Vis at $f(x) = -2x+5$ er avtagende.

Løsning: Anta $x_1 < x_2 \quad | \cdot (-2)$

$$-2x_1 > -2x_2$$

legger til 5 på b.s.

$$f(x_1) = -2x_1+5 > -2x_2+5 = f(x_2)$$

så $f(x)$ er avtagende (faktisk strengt a.)

Oppg: Vi har konstantfunksjonen $f(x) = 5$. Avgjør om $f(x)$ er voksende eller avtagende eller ingen av delene.

Voksende: Hvis $x_1 < x_2$ så er $f(x_1) = 5 \leq 5 = f(x_2)$

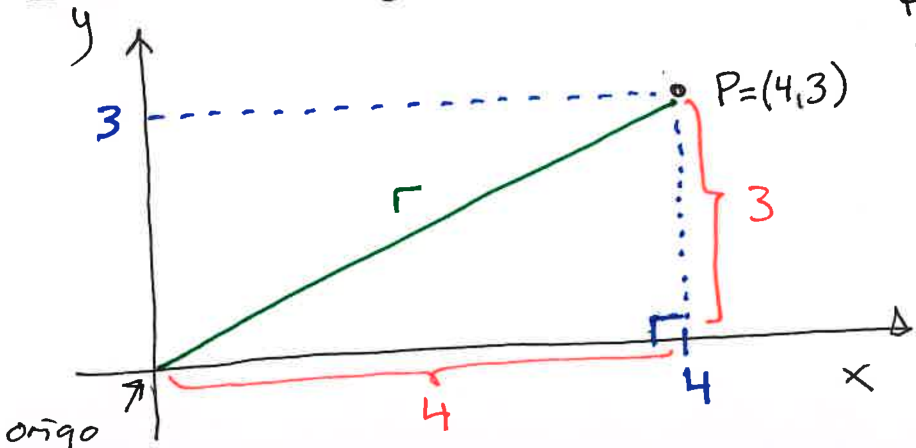
Avtagende: Hvis $x_1 < x_2$ så er $f(x_1) = 5 \geq 5 = f(x_2)$

Definisjon: $f(x)$ strengt voksende hvis $f(x_1) < f(x_2)$ for alle $x_1 < x_2$

$f(x)$ strengt avtagende hvis $f(x_1) > f(x_2)$ —— " ——

---

3. Sirkler og ellipser



Hva er avstanden fra P til origo?

Pytagoras gir svaret:

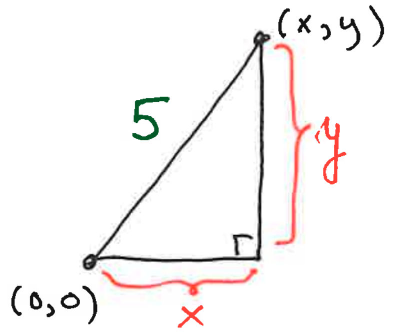
$r^2 = 4^2 + 3^2 \quad (r \geq 0)$

$r^2 = 16 + 9 = 25$

$r = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$

Hvilke andre punkter i planet har avstand 5 fra origo?

Anta (x, y) er et slikt punkt.



Får likningen (fra Pytagoras)

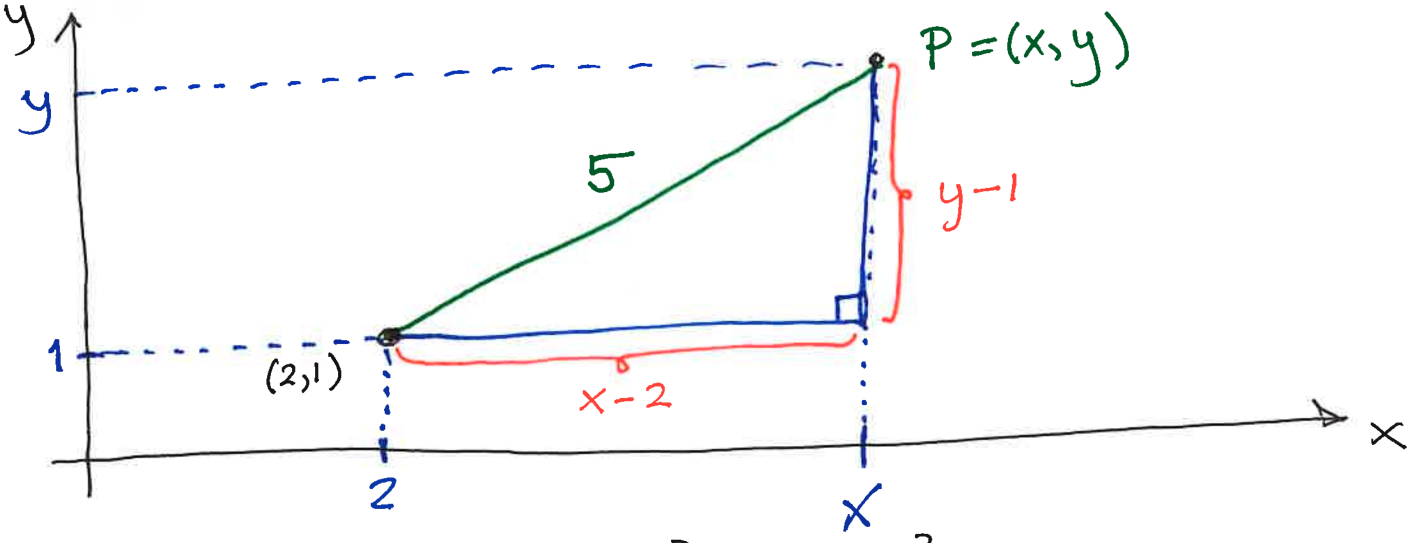
$$5^2 = x^2 + y^2$$

- en likning med <u>to</u> ukjente
- har uendelig mange løsninger.

Løsningene er alle punkter som har avstand 5 fra origo.

Denne mengden kalles for sirkelen med sentrum i origo og radius 5.

<u>Eks</u>: Hva er likningen for punktene på sirkelen med sentrum $(2, 1)$ og radius 5?



Pytagoras: $5^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

$$25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

dvs $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$

Oppg. Finn radius og sentrum i sirklene.

a) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

b) $x^2 + (y+5)^2 = 10$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y = -9$

Løsning: a) Sentrum $(3,2)$, radius $= \sqrt{16} = 4$

b) sentrum $(0,-5)$, radius $= \sqrt{10}$

c) $x^2 - 2x + y^2 + 6y = -9$

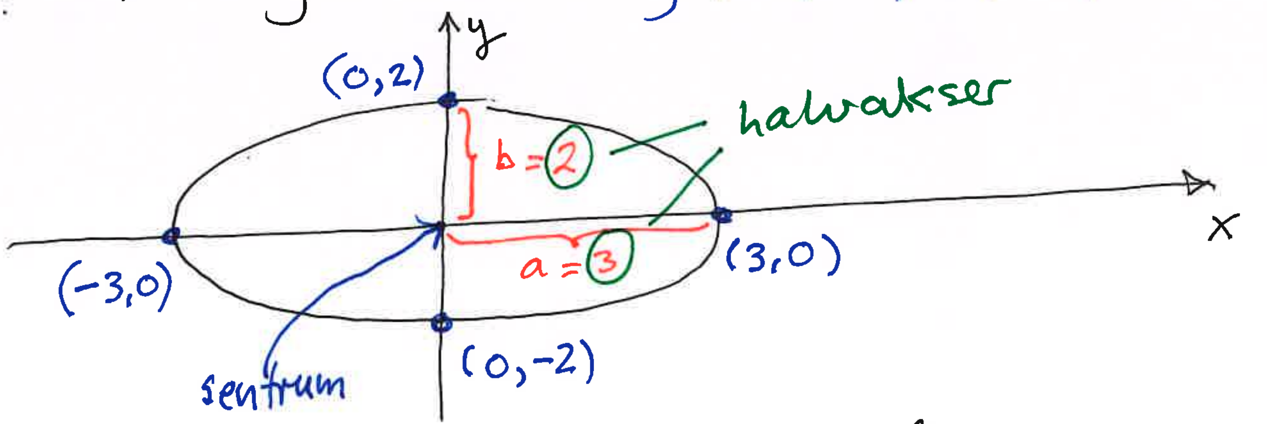
$$\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1} + \underbrace{(y+3)^2}_{y^2+6y+9} = -9 + 1^2 + 3^2 = 1$$

Altså er sentrum $(1,-3)$ og radius $\sqrt{1} = 1$

Ellipser

Eks. $4x^2 + 9y^2 = 36$

x	3	-3	0	0
y	0	0	2	-2



Deler b.s. av likningen med 36:

$$\frac{1}{9} = \frac{4}{36}x^2 + \frac{9}{36}y^2 = 1 \qquad \left(\frac{9}{36} = \frac{1}{4}\right)$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

minner om sirkellinjen men x-aksen er strukket med faktor 3 og y-aksen er strukket med faktor 2.

Generelt kan vi skrive alle ellipser som løsningene til en likning

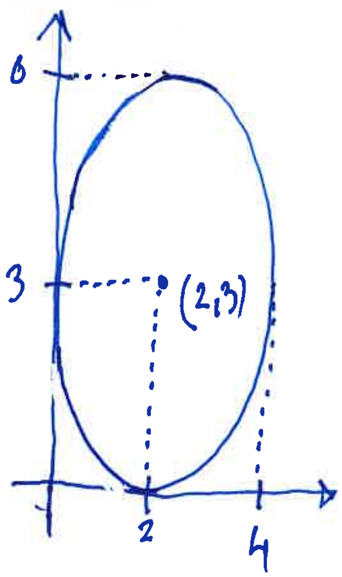
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Her er (x_0, y_0) sentrum i ellipsen og a og b er halvaksene

Eks: $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

halvakser $a = 2$, $b = 3$

sentrum $(2, 3)$



4. Polynomfunksjoner

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

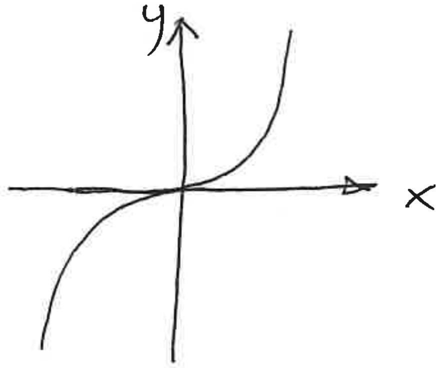
$$(a_n \neq 0)$$

er en polynomfunksjon av grad n.

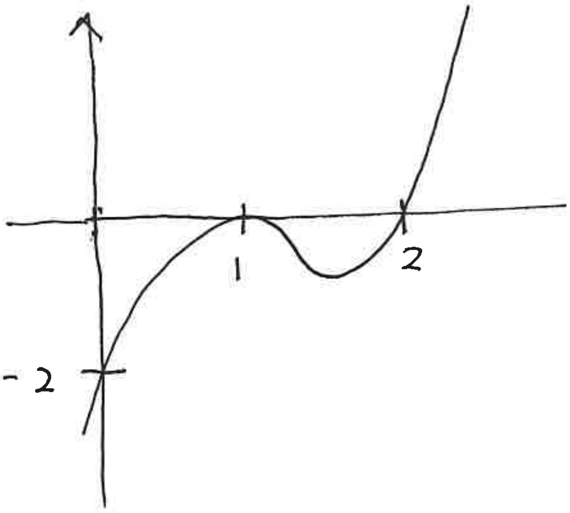
Den kan ha maksimalt n nullpunkter.

Hvis n er odde har den minst ett nullpunkt.

Eks: $f(x) = x^3$ har akkurat ett nullpunkt.



Eks: $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ er en tredjegrads-funksjon med to nullpunkter $(x=1, x=2)$



Eks: $f(x) = x^4 + 1$ er en fjerdegradsfunksjon uten nullpunkter.