MET 1181, 7. forelesning, 23. sept. 2019, Runar Ile

Plan:

1. Repetisjon & oppg.
2. Funksjoner og grafer — kap 3.1–2
3. Lineære funksjoner & rette linjer — 3.3
4. Kvadratiske funksjoner & parabler — 3.4

## 1. Rep. & oppg.

Polynomdivisjon

$$f(x) : g(x) = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

resten

polynomer

Bruk: *) Finne asymptoter

*) Faktorisere polynomer

Hvis polynomet $f(x)$ har en rot (nullpunkt) $k$ så vil $f(x) : (x-k) = q(x)$ – et polynom av 1 grad mindre enn $f(x)$.

Oppg 2b $f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$

Gjetter på at $x = 2$ er en rot: $f(2) = 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 2 - 30 = 8 + 24 - 32 = 0$

Dermed er $x-2$ en faktor i $f(x)$.

Vi finner kvotienten $f(x):(x-2)$ ved polynomdiv:

$$
\begin{array}{l}
(x^3+6x^2-x-30):(x-2) = x^2 + 8x + 15 \\
\underline{-(x^3-2x^2)} \\
\quad 8x^2 - x - 30 \\
\quad \underline{-(8x^2-16x)} \\
\qquad 15x - 30 \\
\qquad \underline{-(15x-30)} \\
\qquad\quad 0 \text{ (resten)}
\end{array}
$$

Altså $x^3 + 6x^2 - x - 30$

$= \underbrace{(x^2+8x+15)}_{\text{røtter: } -3,\, -5}(x-2)$

$= (x+3)(x+5)(x-2)$

4. grad: gjetter på en løsning, polynomdividerer, får et 3. gradspoly, gjetter på en ny løsn. (NB: på 3. gradspoly!), bruker polynomdiv. til å finne andregradspolynom, og finner røttene til dette.

NB: Alle tre røttene i $f(x)$ er divisorer av konstantleddet $-30$. (så $-3$, $-5$, $2$ deler $-30$)
Sånn er det alltid for heltallsløsninger i heltallspolynomer.

---

Radikale likninger ("x under rottegnet")

Plan: Fjerne kvadratrøttene ved å opphøye i andre. Da må kvadratroten stå alene på den ene siden av likningen.

Oppg 5d $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+4} = 1$

Isolerer en av kvadratrøttene.

$$\sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{x+4}$$

Opphøyer i andre på begge sider

$$2x+1 = 1^2 + 2\cdot 1 \cdot \sqrt{x+4} + \left(\sqrt{x+4}\right)^2$$

$$2x + \cancel{1} = \cancel{1} + 2\sqrt{x+4} + x + 4$$

---

Kvadratsetningen: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$x - 4 = 2\sqrt{x+4}$$

opphøyer vs og hs i andre

$$(x-4)^2 = 4(x+4)$$

$$x^2 + 2\cdot(-4)x + (-4)^2 = 4x + 16$$

$$x^2 - 8x + \cancel{16} = 4x + \cancel{16}$$

$$x^2 - 12x = 0$$

$$x(x-12) = 0$$

dvs $x = 0$ eller $x - 12 = 0$

$$x = 12$$

Må teste om dette gir løsninger av opprinnelige likningen.

$\underline{x=0}$ vs: $\sqrt{2\cdot 0+1} - \sqrt{0+4} = \sqrt{1} - \sqrt{4} = 1-2 = -1$

hs: 1 – $\underline{\underline{\text{ulike}}}$, så $x=0$ er <u>ikke</u> en løsning

$\underline{x=12}$ vs: $\sqrt{2\cdot 12+1} - \sqrt{12+4} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5-4 = 1$

hs: 1 – like, så $x = \underline{\underline{12}}$ er eneste løsning.

## Ulikheter

Hvis vi multipliserer en ulikhet på hver side med et negativt tall, må ulikheten snus:

**Eks:**

$$-4 < -3 \quad \Big| \cdot (-2)$$

$$8 = (-4)(-2) > (-3)\cdot(-2) = 6$$

**Oppg 7j**

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)(x+4)} < 1$$

Utvei: Trekker fra 1 på b.s. og setter på felles brøk.

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)(x+4)} - 1 < 0$$

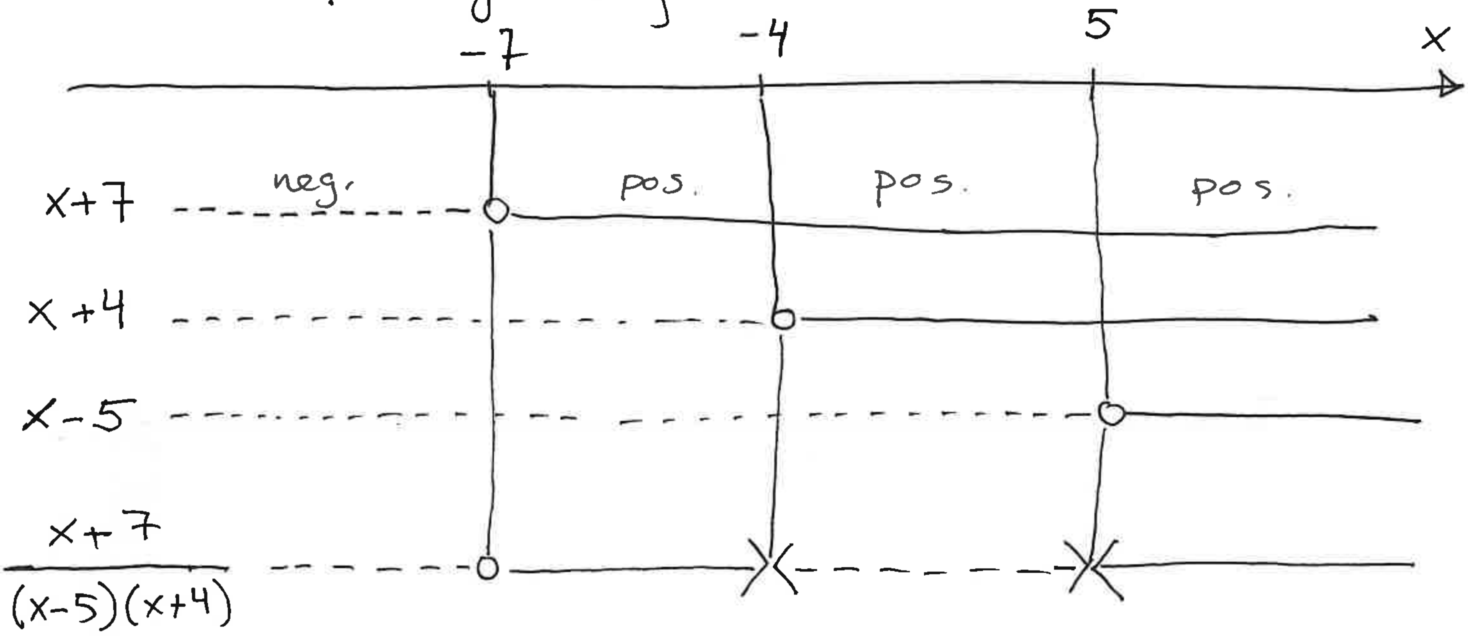
$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)(x+4)} - 1\cdot\frac{(x-5)(x+4)}{(x-5)(x+4)} < 0$$

$$\frac{x^2+\overbrace{3x-2x}^{x}-6-[x^2+\overbrace{4x-5x}^{-x}-20]}{(x-5)(x+4)} < 0$$

$$\frac{\overbrace{2x+14}^{2(x+7)}}{(x-5)(x+4)} < 0 \quad \Big| :2$$

$$\frac{(x+7)}{(x-5)(x+4)} < 0$$

Bruker fortegnsskjema:




Så $\underline{\underline{x < -7 \quad \text{eller} \quad -4 < x < 5}}$

Alternativ: $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, -7\rangle \cup \langle -4, 5\rangle}}$

---

## 2. Funksjoner & grafer

En funksjon er en tabell med funksjonsverdier.

| $x$ | . . . . . |
|---|---|
| $f(x)$ | . . . . . |

Eks: Empiriske funksjoner
- måler temperaturen som en funksjon av tiden.
- fertilitet
- laksepris
- alle slags „indekser" (KPI)

$f(x)$ = gjennomsnittet av førstegangs-fødendes alder i år $x$

Definisjonsområdet: $x \in [1961, 2018]$

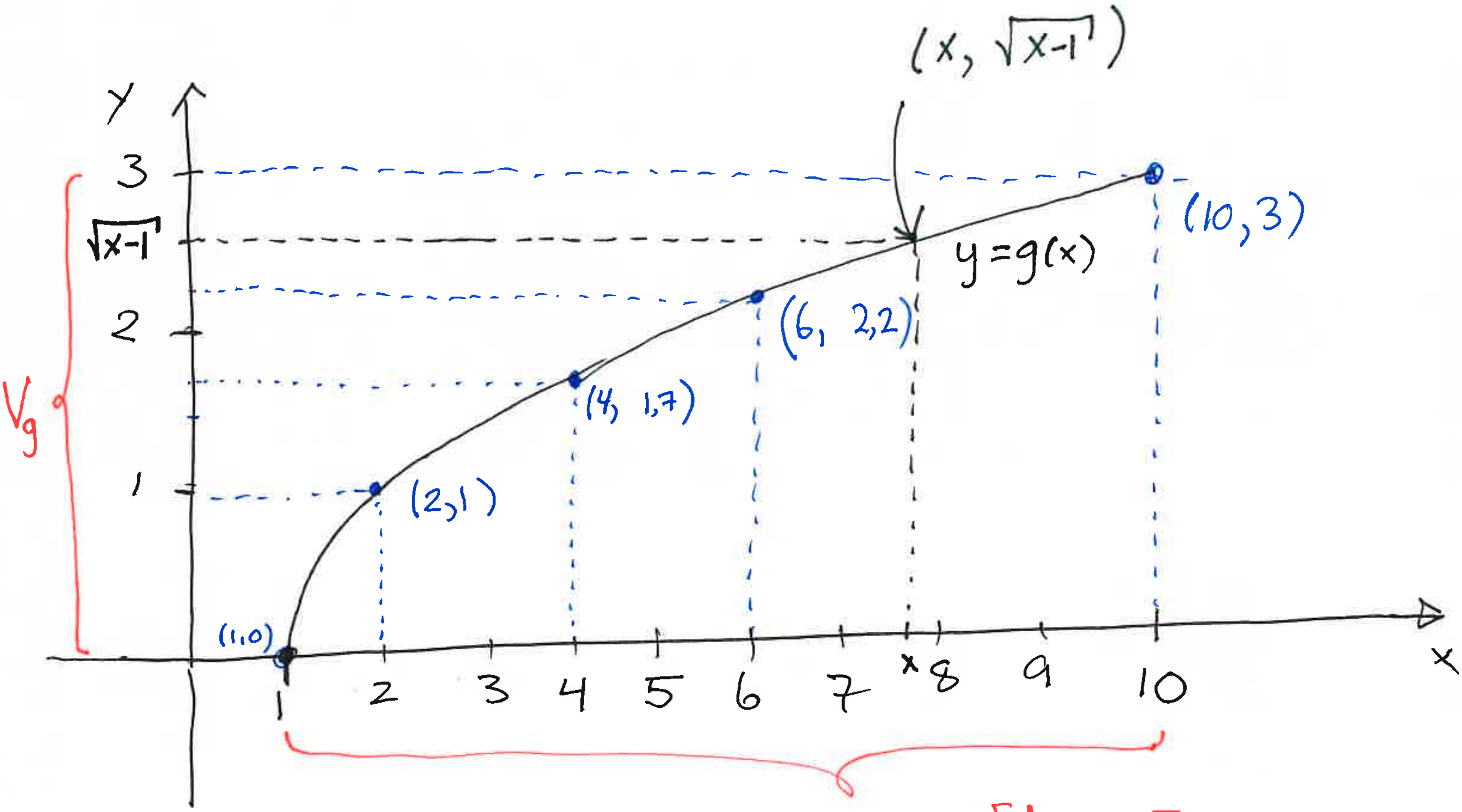
<u>Eks</u>: $g(x) = \sqrt{x-1}$. Størst mulig definisjonsområde er $D_g = [1, \rightarrow\rangle$

(dvs $x \geq 1$)

Vil tegne grafen til $g(x)$ med $D_g = [1, 10]$

Lager tabell:

| $x$ | 1 | 2 | 4 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | 1 | 1,7 | 2,2 | 3 |




$D_g = [1, 10]$

$V_g = [0, 3]$

Funksjon — modeller / teori — uttrykk

situasjon
„alder ved første fødsel"
„lakseprisen"

tabell

| uke | laksepris |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |

graf

empiriske funksjoner

---

## 3. Lineære funksjon.

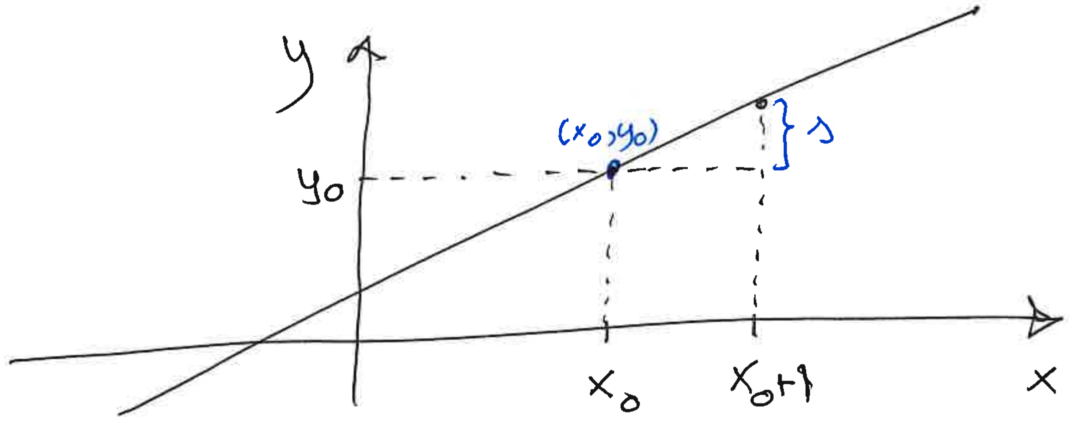
$$f(x) = ax + b$$

Eks: $f(x) = 3x - 2$. $(a = 3, \; b = -2)$

Grafene til lineære funksjoner er linjer.

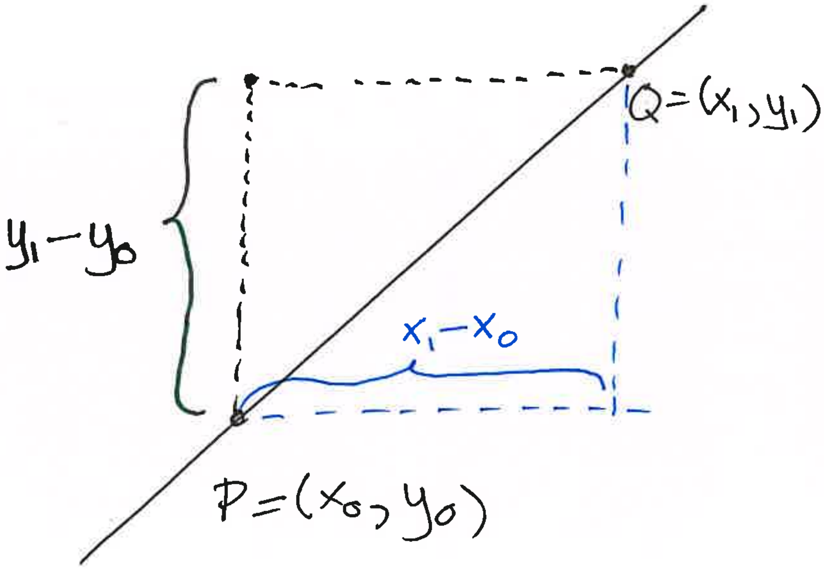
<u>Ettpunktsformelen</u>: Gir oss uttrykket til lineær funksjon hvis vi har stigningstallet $a$ og ett punkt på grafen $(x_0, y_0)$. Da er

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$



NB: Uttrykket er også bestemt av to punkter

$P = (x_0, y_0)$
på grafen
$Q = (x_1, y_1)$




fordi stigningstallet er

$$s = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{\text{endringen i høyde}}{\text{endringen i lengde}}$$

Eks: $(x_0, y_0) = (9, 25)$
$(x_1, y_1) = (11, 31)$

Da er $s = \frac{31 - 25}{11 - 9} = \frac{6}{2} = 3$ så

likningen blir

$$y - 25 = 3(x - 9)$$

# 4. Kvadratiske funksjoner & parabler

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Hvis vi vil tegne grafen er denne formen bedre:

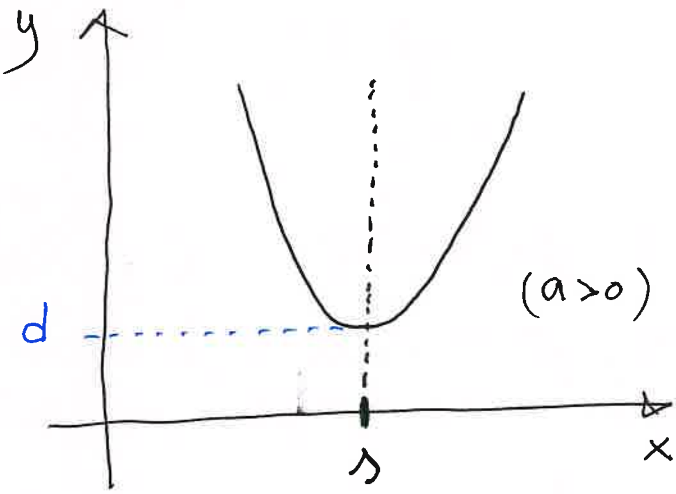
$$f(x) = a(x-s)^2 + d$$ („fullfører kvadratet")

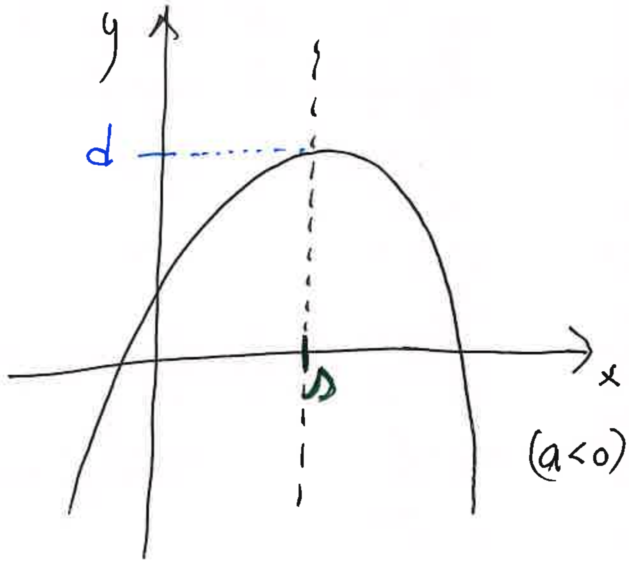
tall

Hvis $a > 0$ har $f(x)$ en minimumsverdi: 

Hvis $a < 0$ har $f(x)$ en maksimumsverdi: 

Vansett: Grafen er symmetrisk om linjen $x = s$




Eks: $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$= (x-1)^2 + 2$

Her er $s = 1$, $d = 2$