MET 1181, 6. forelesning, 16. sept. 2019, Runar Ile

Plan:
1. Repetisjon og oppgaver
2. Polynomdivisjon og faktorisering — kap. 2.5
3. Rasjonale- og radikale likninger — kap 2.6-7
4. Ulikheter — kap 2.8

---

1. Rep. & oppg.

Lineære uttrykk på std. form: $ax+b$

Kvadratiske uttrykk — " — : ax^2+bx+c

Lineære likninger: De kan skrives som $ax+b=0$

Kvadratiske likninger: — " — $ax^2+bx+c=0$

Kvad. likn. har 2, 1 eller ingen løsninger

b^2-4ac pos, $=0$, neg.

Finner løsningene ved å bruke abc-formelen eller ved å fullføre kvadratet:

Oppg 4e) Løse likn $x^2 \boxed{-24} x = 25$ ved å fullføre kvadratet.

:2

Løsning: $(x\boxed{-12})^2 = 25 + (-12)^2$ — legger til $(-12)^2$ på b.s.

dvs $(x-12)^2 = 169$

dvs $x-12=\sqrt{169}=13$ eller $x-12=-\sqrt{169}=-13$

dvs $\underline{\underline{x=25}}$ eller $\underline{\underline{x=-1}}$

Faktorisering og røtter

Oppg 3e) Vi får oppgitt at $x^2+bx+c=0$ har løsningene $x = 3 \pm \sqrt{5}$. Da er

$$x^2+bx+c = (x - \underbrace{(3-\sqrt{5})}_{r_1})(x - \underbrace{(3+\sqrt{5})}_{r_2})$$

$$= x^2 - (3+\sqrt{5})x - (3-\sqrt{5})x + \underbrace{(3^2-(\sqrt{5})^2)}_{(-r_1)(-r_2)}$$

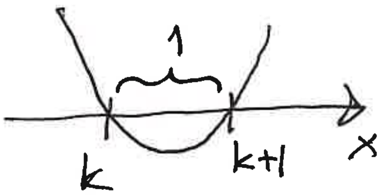
$$= x^2 - (3+\cancel{\sqrt{5}}+3-\cancel{\sqrt{5}})x + 9 - 5$$

$$= \underline{\underline{x^2 - 6x + 4}} \quad (b=-6,\ c=4)$$

Parametre: Tall som ikke har konkrete verdier.
– brukes for å beskrive mange situasjoner samtidig.

Eks: Prisen på en vare er p kr.

Oppg 7a) Alle andregradsuttrykk på formen x^2+bx+c som har to nullpunkter med avstand 1 til hverandre kan skrives som



$$\underbrace{(x-k)}_{\text{nullpunkt: } x=k} \cdot \underbrace{(x-(k+1))}_{\text{nullpunkt: } x=k+1}$$

hvor k er det minste nullpunktet

$$(x-k)(x-(k+1))$$

$$= x^2 - (k+1)x - kx + (-k)(-(k+1))$$

$$= x^2 - (k+1+k)x + k(k+1)$$

$$= x^2 - \underbrace{(2k+1)}_{\text{summen av røttene}}x + \underbrace{k(k+1)}_{\text{produktet av røttene}}$$

---

2. Polynomdivisjon

Vil dividere et polynom $f(x)$ med et polynom $g(x)$ og få et polynom $q(x)$ og (eventuelt) en rest $r(x)$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \Big| \cdot g(x)$$

dvs $\quad f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$

Eks: $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$g(x) = x - 2$

$$3x^2 : x \qquad 8x : x$$

$$(\boxed{3x^2} + 2x + 1) : (\boxed{x} - 2) = 3x + 8 + \frac{17}{(x-2)}$$

$$-(3x^2 - 6x)$$

$$\boxed{8x} + 1$$

$$-(8x - 16)$$

$\boxed{17}$ er resten fordi

$$\text{grad}(17) = 0 < 1 = \text{grad}(x-2)$$

Så $q(x) = 3x + 8$ og $r(x) = 17$

Svaret betyr: $\left(3x + 8 + \frac{17}{x-2}\right) \cdot (x-2)$

$$= 3x^2 + 8x - 6x - 16 + \frac{17}{\cancel{x-2}} \cdot \cancel{(x-2)}$$

$$= 3x^2 + 2x + 1 = f(x).$$

Dvs: $3x^2 + 2x + 1 = (3x+8)(x-2) + 17$

To poenger med polynomdivisjon:

A) Finne asymptoter til rasjonale funksjoner

Eks: $\dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x - 2} = \boxed{3x+8} + \dfrac{17}{x-2}$

har vertikal asymptote for $x = 2$

og en skrå asymptote: $y = 3x + 8$

B) Vil faktorisere polynomer i lineære faktorer

<u>Eks</u>: Faktorisér $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ i lineære faktorer.

<u>Løsning</u>: Tre steg.

I Gjetter på et heltallig nullpunkt

[NB: Må dele 30]

prøver: $x = -3$: $(-3)^3 - 4\cdot(-3)^2 - 11\cdot(-3) + 30$

$$= -27 - 36 + 33 + 30 = 0$$

Da er $(x-(-3))$ en faktor i polynomet!

II Bruker polynomdivisjon til å faktorisere polynomet som et produkt av $(x-(-3)) = (x+3)$ og et andregradsuttrykk

$$x^3 : x \qquad -7x^2 : x \qquad 10x : x$$

$$(\boxed{x^3} - 4x^2 - 11x + 30) : (\boxed{x} + 3) = x^2 - 7x + 10$$

$$\frac{-(x^3 + 3x^2)}{\boxed{-7x^2} - 11x + 30}$$

$$\frac{-(-7x^2 - 21x)}{\boxed{10x} + 30}$$

$$\frac{-(10x + 30)}{0 \text{ rest}}$$

<u>Dvs</u>: $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x^2 - 7x + 10)\cdot(x+3)$

III Finner røttene til $x^2 - 7x + 10$

Det er $x = 2$, $x = 5$.

Da er $x^2 - 7x + 10 = (x-2)\cdot(x-5)$

Dermed: $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x-2)\cdot(x-5)\cdot(x+3)$

NB1: Det er ikke alltid mulig å faktorisere andregradsuttrykk

Eks: $x^2 + 5$, $x^2 + 2x + 3$

$b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 < 0$

NB 2: Kan være vanskelig å gjette på en rot – behøver ikke være heltallig.

3. Rasjonale- og radikale likninger

Rasjonal likning: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$

hvor $p(x)$ og $q(x)$ er polynomer.

Eks: $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)} = 2$

trekker fra 2 på b.s.

$\dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)} - 2 = 0$

mult. utvider 2 med $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)}$

$\dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)} - \dfrac{2(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 0$

hjelperegning:
$(x-1)(x+3) = x^2+3x-x-3$
$= x^2+2x-3$

$$\frac{x+1-2x^2-4x+6}{(x-1)(x+3)} = 0$$

$$\frac{-2x^2-3x+7}{(x-1)(x+3)} = 0$$

– en rasjonal likning på std. form.

dvs $-2x^2-3x+7=0$
(og $x \neq 1$, $x \neq -3$)

Nå kan vi bruke abc el.

Radikale likninger
– den ukjente inngår i et rotuttrykk.

Eks: $2\sqrt{x+1} = x-2$

kvadrerer på b.s.

$4(x+1) = x^2-4x+4$

dvs $4x+\cancel{4} = x^2-4x+\cancel{4}$

dvs $x^2-8x=0$ dvs $x(x-8)=0$

dvs $x = \underline{0}$ eller $x = \underline{8}$

Forklaring: $(2\sqrt{x+1})^2 = 2^2(\sqrt{x+1})^2 = 4\cdot(x+1)$
$= 2\sqrt{x+1}\cdot 2\cdot\sqrt{x+1}$

NB: Ikke alle disse behøver å være løsninger til den opprinnelige likningen.
Vi må teste dem:

$\underline{x=0}$ vs: $2\sqrt{0+1} = 2\cdot 1 = 2$; hs: $0-2 = -2$ — ulike, så $x=0$ er ikke en løsning.

$\underline{x=8}$.   vs: $2\cdot\sqrt{8+1} = 2\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6$; hs: $8-2 = 6$ — like, så $x=\underline{\underline{8}}$ er eneste løsning.

Oppg. Løs likningen $\sqrt{x+5}+1 = \sqrt{3x+4}$

NB: $\left(\sqrt{x+5}+1\right)^2 = \left(\sqrt{x+5}+1\right)\left(\sqrt{x+5}+1\right)$

$= x+5+2\sqrt{x+5}+1$

Løsning: Kvadrerer (= opphøyer i andre) på b.s.

$$x+5+2\sqrt{x+5}+1 = 3x+4$$

$$2\sqrt{x+5} = 2x-2 \qquad | :2$$

$$\sqrt{x+5} = x-1$$

kvadrerer b. s.

$$x+5 = x^2 - 2x + 1$$

dvs $x^2 - 3x - 4 = 0$

dvs $x = -1$ eller $x = 4$

Sjekker:

$\underline{x=-1}$ vs: $\sqrt{-1+5} + 1 = \sqrt{4} + 1 = 3$
hs: $\sqrt{3\cdot(-1)+4} = \sqrt{1} = 1$

ulike, $x=-1$ er ikke en løsn.

$\underline{x=4}$ vs: $\sqrt{4+5} + 1 = \sqrt{9} + 1 = 4$
hs: $\sqrt{3.4+4} = \sqrt{16} = 4$

like, så $x = \underline{\underline{4}}$ er eneste løsning.

---

4. Ulikheter.

$-2 < -1$ leses: „minusto er mindre enn minus en"

$\frac{1}{9} > \frac{1}{12}$ leses: „en nidel er større enn en tolvdel"

Også: $\leq$ og $\geq$

En ulikhet er en påstand om at et uttrykk er $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ et annet uttrykk.

Løsningene på en ulikhet er de verdiene av x som gjør påstanden sann.

Eks: $x - 1 \geq 2$ er en påstand

som er sann for $x = 5$ fordi $5 - 1 \geq 2$ er sant.

Påstanden er usann for $x = 2$ fordi $2 - 1 \geq 2$ ikke er sant.

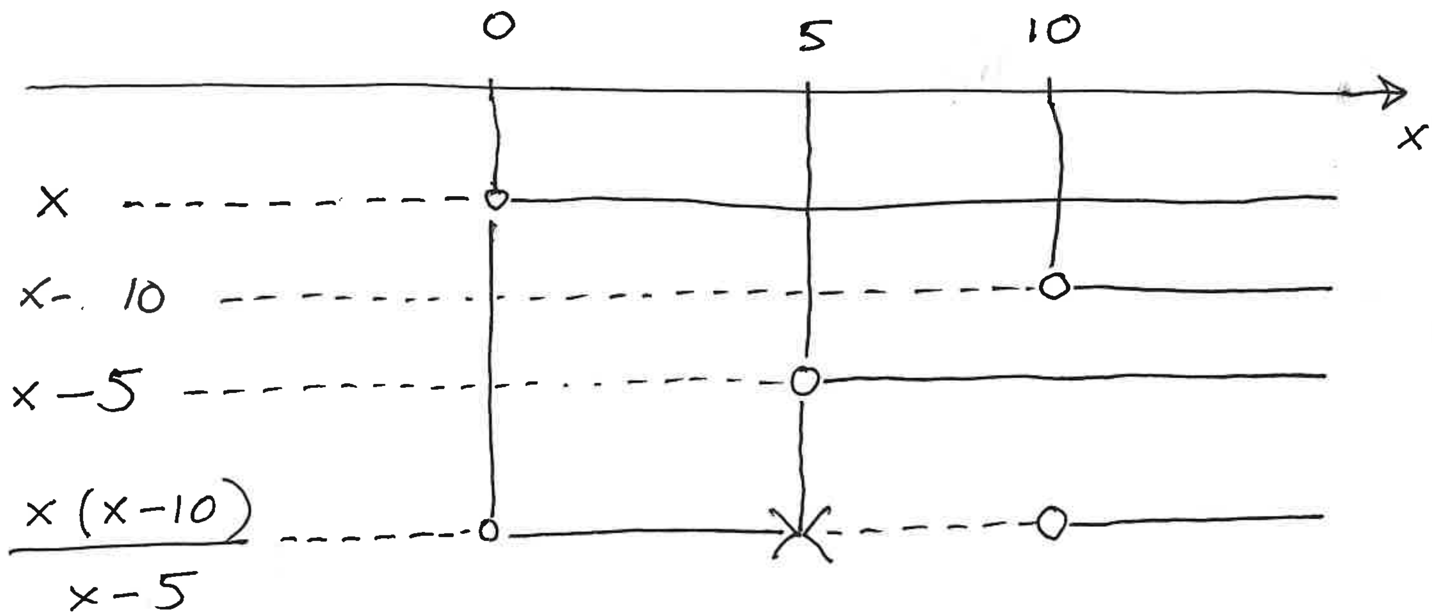
Løsningene på ulikheten er alle verdier av x slik at $x \geq 3$

– dette er en uendelig mengde tall!

Skriver også $x \in [3, \infty\rangle$

Eks: Løs ulikheten: $\dfrac{x(x-10)}{(x-5)} \geq 0$

Løsning: Fordi vi har 0 på h.s. og en ferdig faktorisert brøk kan vi bruke fortegnskjema med en gang.



dvs $\underline{\underline{0 \leq x < 5 \text{ eller } x \geq 10}}$

alternativ skrivemåte $\underline{\underline{x \in [0, 5\rangle \text{ eller } x \in [10, \infty\rangle}}$