MET 1180, 4. forelesning, 2. sept. 2019, Runar Ile

Plan: 1. Repetisjon og veiledningsoppg.
2. Uendelige rekker og grenseverdier
3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

1. Rep/veil.oppg

Renteformelen $K_n = K_0 \cdot \overbrace{(1+r)^n}^{\text{vekstfaktor for } n \text{ terminer}}$, $\underbrace{(1+r)}_{\text{vekstfaktor for 1 termin}}$

K_0 = innskudd

K_n = balanse etter n terminer

r = terminrenten

Oppg 2b Innskudd: 50 000

3,6 % nominell rente, månedlig kapitalisering (rentetermin = 1 mnd)

i) Etter 10 år er balansen:

$$50000 \cdot \left(1 + \frac{3{,}6\%}{12}\right)^{120} = 50000 \cdot 1{,}003^{120} = \underline{\underline{71\,627{,}86}}$$

ii) Vekstfaktor for 10 år:

$$1{,}003^{120} = 1.4326$$

og relativ prosentvis endring: $1{,}4326 - 1 = \underline{\underline{43{,}26\%}}$

iii) Årlig vekstfaktor: $1{,}003^{12} = 1{,}0366$

og effektiv rente: $1{,}0366 - 1 = \underline{\underline{3{,}66\%}}$

Kontantstrøm: Nåverdi og internrente

Oppg5

år	0	4	7
betaling	-20	9	14

– en kontantstrøm

a) Diskonteringsrenten: 12 %. Da er nåverdien til kontantstrømmen $-20 + \frac{9}{1{,}12^4} + \frac{14}{1{,}12^7} = \underline{\underline{-7{,}95}}$

b) En lavere diskonteringsrente r vil gjøre nåverdiene $\frac{9}{(1+r)^4}$ og $\frac{14}{(1+r)^7}$ større.

Derfor må renten ned for at nåverdien av kontantstrømmen skal bli 0.

Alternativ: Siden nåverdien er negativ er avkastningen på investeringen mindre enn 12%

c) Vi setter $r = 2{,}44\,\%$ inn i uttrykket for nåverdien og får

$$-20 + \frac{9}{1{,}0244^4} + \frac{14}{1{,}0244^7} = 0{,}00$$

Da er 2,44% internrenten til kontantstrømmen.

d) 2,44% er langt fra 12%. Investeringen er dermed antagelig ikke så interessant. Hvis innbetalingen av 20 mill endres til 12.05 mill vil investeringen ha internrente 12 %.

Regulære kontantstrømmer:

Samme beløp betales hver termin.

Typisk eks: Annuitetslån (Nåverdi: Lånebeløp)

Annet eks: Sparing med fast beløp

Sluttverdien: Det du har spart med renter

Nåverdien og sluttverdien til regulære kontantstrømmer er geometriske rekker

Eks (annuitetslån, 4 %)

år	0	1	2	....	14	15
		70	70	....	70	70

$$\frac{70}{1{,}04}$$

$$\frac{70}{1{,}04^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{70}{1{,}04^{14}}$$

$$\frac{70}{1{,}04^{15}}$$

Summen er nåverdien til den regulære kontantstrømmen.

Geometrisk rekke: $\frac{70}{1,04} + \frac{70}{1,04^2} + \dots + \frac{70}{1,04^{14}} + \frac{70}{1,04^{15}}$

$1,04 \quad 1,04 \quad \cdot 1,04 \quad \cdot 1,04$

Vi leser rekken baklengs: $a_1 = \frac{70}{1,04^{15}}$

$k = 1,04$, $n = 15$

Nåverdien (lånebeløpet) får vi fra formelen for summen av en geom. rekke:

$$a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{70}{1,04^{15}} \cdot \frac{1,04^{15} - 1}{1,04 - 1} = \underline{\underline{778,29}}$$

2. Vendelige rekker og grenseverdier

__Eks:__ Annuiteten 70 000 pr år med 4% rente i n år gir nåverdi (i 1000):

$$\frac{70}{1,04^n} \cdot \frac{1,04^n - 1}{0,04} = 70 \cdot \frac{1,04^n - 1}{1,04^n \cdot 0,04}$$

$$= 70 \cdot \frac{(1,04^n - 1) : 1,04^n}{(1,04^n \cdot 0,04) : 1,04^n} = 70 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,04^n}}{0,04}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \quad 70 \cdot \frac{1 - 0}{0,04} = \frac{70}{0,04} = \underline{\underline{1750}}$$

Konkl: Hvis du betaler 70000 hvert år med 4% <u>for all</u> <u>fremtid</u> så kan du få låne 1,75 mill

3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

Eks: Du setter inn 1000 kr på konto med 12 % nominell rente i ett år.

Kapitalisering	Balanse etter 1 år
Årlig	$1000 \cdot 1{,}12 = 1120{,}00$
Halvårlig	$1000 \cdot 1{,}06^2 = 1123{,}60$
Kvartalsvis	$1000 \cdot 1{,}03^4 = 1125{,}51$
Månedsvis	$1000 \cdot 1{,}01^{12} = 1126{,}83$
Daglig	$1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{365}\right)^{365} = 1127{,}47$
Mønster: n terminer/år	$1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{n}\right)^n$

Eulers tall: $e = 2{,}71828\ldots$

Regner $1000 \cdot e^{0{,}12} = 1127{,}50$

taster: 1000 $\boxed{\times}$ 0,12 $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$

Eulers tall er definert som grensen til $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ når n blir stor ($n \to \infty$)

Skriver: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e$

Eks: $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}71692\ldots$

$\left(1 + \frac{1}{1\text{ mill}}\right)^{1\text{ mill}} = 2{,}71828\ldots$

Eks over, fots: $\left(1+\frac{0,12}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{0,12}\right)}\right)^n$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{0,12}\right)}\right)^{\frac{n}{0,12}}}_{\text{nærmer seg } e \text{ når } n \to \infty}\Bigg]^{0,12}$$

Så $\left(1+\frac{0,12}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{0,12}$

Etter 1 år med 12% nominell rente og kontinuerlig forrentning har innskuddet 1000 kr vokst til

$$1000 \text{ kr} \cdot e^{0,12} = 1127,50 \text{ kr}$$

Dvs: Den årlige vekstfaktoren er

$$e^{0,12} = 1,127497$$

så effektiv rente er 12,7497%

Etter 2 år med 12 % nominell rente og kontinuerlig forrentning har innskuddet vokst til

$$1000 \cdot e^{0,12} \cdot e^{0,12} = 1000 \cdot \left(e^{0,12}\right)^2$$

$$= 1000 \cdot e^{0,12 \cdot 2}$$

$$= 1000 \cdot e^{0,24}$$

(1000 $\boxed{\times}$ 0,24 $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$)

$$= \underline{\underline{1271,25}}$$

<u>Oppg</u>: Du setter inn 10 mill på konto med nominell rente : 2,8% . <u>Beregn</u> balansen etter 5 år med :

a) årlig forrentning
b) kontinuerlig forrentning
c) Beregn den effektive renten når det er kontinuerlig forrentning.

Løsning: a) $10 \text{ mill} \cdot 1,028^5 = \underline{\underline{11,48 \text{ mill}}}$

b) $10 \text{ mill} \cdot \left(e^{0,028}\right)^5 = 10 \text{ mill} \cdot e^{0,028 \cdot 5}$

$$10 \text{ mill} \cdot e^{0,140} = \underline{\underline{11,50 \text{ mill}}}$$

c) Vekstfaktoren er $e^{0,028} = 1,0284$

så den effektive renten er $1,0284 - 1 = \underline{\underline{2,84\ \%}}$

Oppgave 3 fra forrige veiledning.

a) Nåverdien av 250 000 om 10 år med 3,4% rente er

$$\frac{250\,000}{1{,}034^{10}} = 178951{,}20$$

b) Renten går ned til 1,9% etter det 4. året.
Da blir sluttverdien

$$\frac{250\,000}{1{,}034^{10}} \cdot 1{,}034^{4} \cdot 1{,}019^{6} = 229\,613{,}92$$

c) $$= 250\,000 \cdot \frac{1{,}034^{4} \cdot 1{,}019^{6}}{1{,}034^{10}}$$

$$= 250000 \cdot 1{,}034^{4-10} \cdot 1{,}019^{6}$$

$$= 250000 \cdot 1{,}034^{-6} \cdot 1{,}019^{6}$$

$$= 250\,000 \cdot \frac{1}{1{,}034^{6}} \cdot 1{,}019^{6}$$

$$= 250\,000 \cdot \frac{1{,}019^{6}}{1{,}034^{6}}$$

$$= 250\,000 \cdot \left(\frac{1{,}019}{1{,}034}\right)^{6}$$